UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO



CENTRO DE ESTUDIOS
PRE UNIVERSITARIO - UNSAAC



ÁLGEBRA

DIRECTORIO CENTRO DE ESTUDIOS PREUNIVERSITARIOS -UNSAAC

DIRECTOR:

Dr. SANTIAGO SONCCO TUMPI

INTEGRANTES:

- Dr. ALFREDO CANDÍA GÓMEZ
- Mgt. DANY JORGE CAÑIHUA FLOREZ

PERSONAL ADMINISTRATIVO

- PEDRO PAUL LABRA QUISPICURO
- JODY MURILLO NEYRA
- WILBER CELSO GAMERO HANDA
- EDITH DIANA QUIRITA ACHAHUANCO
- YOHN ELMER SOTO SURCO
- FREDY ROLANDO GÓMEZ YARAHUAMAN



POTENCIACIÓN

DEFINICIÓN. *Sean* $n \in \mathbb{N}$ *y* $a \in \mathbb{R}$, *se define la potenciación como la operación que consiste en multiplicar* "n" *veces el número* "a" *y lo representamos como* a^n, *es decir:*

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a ... \times a}_{n\ factores}$$

Donde:

- "a" : *Es la base.*
- "n" : *Es el exponente.*
- "a^n" : *Es la potencia.*

Ejemplos:

- ✓ $(5)^3 = 5\times5\times5 = 125$
- ✓ $(-1)^5 = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = -1$
- ✓ $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

PROPIEDADES DE LA POTENCIACION

- ***Producto de bases iguales***: *el producto de potencias de igual base es otra potencia de la misma base y de exponente igual a la suma de los exponentes de los términos factores.*
  Simbólicamente:

  $$a^m . a^n = a^{m+n} \ ; \forall a \in \mathbb{R}$$

  Ejemplo: $3^8 \times 3^{10} \times 3^2 = 3^{8+10+2} = 3^{20}$

- ***Cociente de bases iguales***: *El cociente de dos potencias de igual base, es otra potencia de la misma base y cuyo exponente es igual a la sustracción de los exponentes del numerador y denominador.*
  Simbólicamente:

  $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ ; \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

  Ejemplo: $\frac{5^{12}}{5^3} = 5^{12-3} = 5^9$

- ***Exponente de una potencia***: *El exponente de una potencia es otra potencia de la misma base y de exponente igual al producto de los exponentes que haya en la expresión*
  Simbólicamente:

  $$\left(a^m\right)^n = a^{m.n} \ ; \forall a \in \mathbb{R}$$

Ejemplo: $\left\{\left[(-2)^3\right]^5\right\}^2 = (-2)^{3\times5\times2} = (-2)^{30}$

- ***Exponente de un producto****: El exponente de un prodcuto es igual al producto de dichas potencias.*
Simbólicamente:

$$(a.b)^n = a^n.b^n \ ; \forall a,b \in \mathbb{R}$$

Ejemplo*:* $(5\times2)^3 = 5^3\times2^3$

- ***Exponente de un cociente****: El exponente de un cociente es igual al cociente de dichas potencias.*
Simbólicamente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b^n}^n \ ; \forall b \in \mathbb{R}-\{0\}$$

Ejemplo*:* $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16}$

- ***Exponente cero****: toda cantidad con exponente cero es igual a 1*
Simbólicamente:

$$a^0 = 1 \ ; \forall a \in \mathbb{R}-\{0\}$$

OBSERVACIÓN:

La expresión 0^0 ***no está definida.***

- ***Exponentes enteros negativos:*** *si* ***n*** *es cualquier entero negativo y* ***a*** *un número real diferente de cero se cumple que:*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad o \ que \ \ a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

- *En caso de que la base sea un número racional se tiene que*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \ ; \forall a,b \in \mathbb{R}-\{0\}$$

Ejemplos*:*

- ✓ $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
- ✓ $\left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$

RADICACIÓN

DEFINICIÓN. *La radicación se define como:*

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

Donde:

- ***"n":*** *Es el índice del radical ($n \geq 2$).*
- ***"a":*** *Es el radicando ($a \in \mathbb{R}$, además, cuando "n" es par, $a \geq 0$).*
- ***"b":*** *Es la raíz n-ésima.*

Ejemplo:

$$\sqrt{25} = 5 \quad porque \quad 5^2 = 25$$
$$\sqrt[3]{125} = 5 \quad porque \quad 5^3 = 125$$

EXPONENTES RACIONALES

Una expresión radical puede escribirse como una potencia de exponente racional, es decir:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad ; n \geq 2$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$$

PROPIEDADES DE LOS RADICALES.
En las siguientes expresiones, consideremos la existencia de cada uno de los radicales.

- ***Raíz enésima de un producto:*** *la raíz enésima de un producto es igual al producto de las raíces enésimas de los factores. Para cualquier $n \in Z^+$, se cumple que:*

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

- ***Raíz enésima de un cociente:*** *la raíz enésima de un cociente es igual al cociente de las raíces enésimas del dividendo y del divisor. Para todo $n, a, b, \in Z^+$, se cumple que:*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

- ***Raíz enésima de una raíz:*** *la raíz enésima de una raíz es igual a otra raíz, cuyo índice es el producto de los índices. Para todo $m, n, b, \in Z^+$, se cumple que:*

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[m.n]{b}$$

- ***Propiedad fundamental de los radicales:*** *Se puede multiplicar o dividir el índice de la raíz y el exponente del radicando por un mismo número y el valor de la raíz no cambia. Se debe tener en cuenta que, si n es par, entonces el radicando debe ser positivo para que exista una raíz real.*

$$\sqrt[kn]{b^{km}}=\sqrt[n]{b^{m}}=b^{\frac{m}{n}}\ ;donde\ k\in\mathbb{N}$$

EJERCICIOS

1. *El equivalente de la expresión:* $\dfrac{15^6.12^4.5^9.6^4}{10^{11}.3^{14}.5^4}$, *es:*

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

2. *Si* $x^x=5$ *el valor de* $H=x^{x+x^{1+x}}$, *es:*

a) 25
b) 25^2
c) 25^3
d) 125
e) 5

3. *Luego de simplificar la expresión:*

$$\frac{2(8^n)-(0,5)^{1-3n}}{(0,125)^{1-n}}$$

a) 12
b) 16
c) 64
d) 8
e) 32

4. *Si:* $x^{x^{x}}=\sqrt{2}$ *; calcular* $\left[x^{\sqrt{2}}\right]^{x^{x+x^{x}}}$

a) $\sqrt{2}$
b) 2
c) 4
d) $2\sqrt{2}$
e) 8

5. *Hallar el valor de la expresión:*

$$E=\sqrt[n]{\frac{20^{n+1}}{4^{n+2}+2^{2n+2}}}$$

a) 5
b) 2
c) 25
d) 20
e) 1

6. *Siendo* $\{m,n\}\subset\mathbb{N}$, *indicar si es verdadero (V) o falso (F) en cada una de las siguientes proposiciones:*

$I.\ \sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y}\ ;\forall x,y\in\mathbb{R}$

$II.\ \sqrt[n]{x}=\sqrt[m.n]{x^m}\ ;\forall x\in\mathbb{R}$

$III.\ \sqrt[n]{x^m}=\sqrt[n]{x}^{\,m}\ ;\forall x\in\mathbb{R}$

$III.\ \sqrt[n]{x^n.y}=x.\sqrt[n]{y}\ ;\forall x,y\in\mathbb{R}$

La secuencia correcta de valores de verdad de las proposiciones es:

a) VVVV
b) FFFF
c) FFVV
d) VVFF
e) VFVF

7. *Luego de simplificar la expresión:*

$$\left[\frac{\sqrt{x^3\sqrt{x\ \sqrt[3]{x}}\,.x^2}}{\sqrt[4]{x^3.\sqrt[3]{x}}}\right]^{24}\ ;\ x>0$$

El exponente de "x" es:

a) 12
b) 16
c) 72
d) 81
e) 64

8. *Si* $x^x = 2$ *luego el valor de* $J = x^{x^{x+1-x^{1+x}}}$ *, es:*

a) 2
b) 4
c) $\sqrt{2}$
d) $\frac{1}{2}$
e) 8

9. *Al resolver la ecuación:* $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$ *; el valor de:* $x + x^{-1}$*, es:*

a) 10/3
b) 5/2
c) 17/4
d) 2
e) 32

10. *Luego de simplificar:* $H = \dfrac{2^{n+1}.4^{-2n+1} + 8^{-n+2}}{16(2^n)^{-3}}$ *se obtiene como resultado:*

a) 4,2
b) 4,5
c) 6,5
d) 2,5
e) 3,5

11. *El valor numérico de:* $N = \sqrt[3]{\dfrac{x\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}}$ *cuando* $x = 2^{\frac{60}{7}}$ *, es:*

a) 2^2
b) 4^2
c) 2^5
d) 1
e) 2^{30}

12. *El valor de la expresión:* $M = \sqrt[n]{\dfrac{256^{n+1}\ \sqrt[n+1]{4^{n^2-1}}}{64^{n+1}\ \sqrt[\frac{1}{n}]{4^{-1}}}}$,

es:

a) 1
b) 8
c) 64
d) 128
e) $0,5$

13. *Indicar el equivalente de:* $K = \left[\dfrac{x^{1+\frac{1}{x}} + x^{1-\frac{1}{x}}}{x + x^{1-\frac{2}{x}}}\right]^x$

a) x^2
b) x
c) x^{-1}
d) x^{-2}
e) x^{-4}

14. *Luego de reducir la expresión:* $L = \left[b^{-b^{-b^{-b^{-b}}}}\right]^{b^{b}\sqrt[b]{b}\sqrt{b}}$,

se obtiene:

a) b^b
b) b^2
c) b^{2b}
d) 1
e) b^{-1}

15. *Luego de simplificar la expresión:*

$N = \left[\left(\dfrac{1}{64}\right)^{-2^{-1}}\right]^{(-27)^{-3^{-1}}}$ *, se obtiene:*

a) 7
b) 3
c) 2
d) 0,5
e) 0,25

16. *Si:* $\{a,b,c\} \subset \mathbb{R}^+$ *, además* $ab = c$; $b \neq 1$*. El valor de* $a\left(\sqrt[n]{\dfrac{b^n - 1}{c^n - a^n}}\right)$ *.es:*

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

17. *Si:* $25^{-4^{-x^{-9^{-2^{-1}}}}} = 0,2$*. La suma cifras de* $3x + 1$*, es:*

a) 6
b) 5
c) 7
d) 1
e) 8

18. *Si:* $\left[\left(2y\right)^{2^7}\right]^{y^7}=3^{\sqrt[3]{3^4}}$ *. El valor de "y" es:*

a) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{7}$

b) $\dfrac{\sqrt[7]{7}}{7}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{4}$

e) $\sqrt[3]{7}$

19. *Al simplificar la expresion:*

$$D=\sqrt[a]{\frac{20^{a+1}}{4^{a+2}+2^{2a+2}}}+\sqrt[a-1]{\frac{5^{a-1}+3^{a-1}}{5^{1-a}+3^{1-a}}}$$ *, se obtiene:*

a) 5
b) 15
c) 20
d) 10
e) 25

20. *El valor aproximado de:* $B=\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{8\sqrt{16...}}}}$ *es:*

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 9

21. *Si se cumple:* $2^{22}+1024=1024a$ *. El valor de:*

$2^{2^{2^2}}-((2^2)^4)^{0.5}a$ *, es:*

a) -16
b) 15
c) 8
d) 13
e) 16

22. *Luego de simplificar la expresión:*

$$\frac{\sqrt{a^3b^3\sqrt[4]{a^2b^2\sqrt[5]{ab}}}}{\sqrt[6]{\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^6b^6}}}}}$$ *, se obtiene:*

a) $\sqrt[7]{x^4}$

b) $\sqrt[3]{x^7}$

c) $\sqrt[4]{x^7}$

d) x

e) $\sqrt[7]{x^2}$

23. *Luego de reducir la expresión:*

$$S=\left(x^{\frac{n}{n-1}}\cdot\sqrt[n-1]{\frac{y^{n-1}}{\sqrt[n]{xy^{n-1}}}}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$ *el valor que se obtiene es:*

a) x
b) x^n
c) $x.y$
d) 1
e) x/y

24. *Luego de reducir:* $Y=\dfrac{n^{n!}.(n-1)!^{(n+1)!}}{(n!)^{n!}.(n-1)!^{n(n!)}}$ *, se obtiene:*

a) $n^{n!}$

b) $(n!)^n$

c) $n!$

d) n

e) 1

25. *Al resolver la ecuación,*

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{x}\cdot\left(\frac{81}{16}\right)^{4x}=\frac{4}{9},$$

el valor de "x" es:

a) $\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{2}{3}$

c) $-\dfrac{1}{3}$

d) $-\dfrac{2}{3}$

e) 6

26. 6 *Si:* $\left(x^{x^{x+3}}\right)\left(x^{2x^{x+2}}\right)=a^{a^{\frac{1-a}{a}}}$ *, la expresión*

$\left(\frac{1}{a}\right)^{-\left(\frac{1}{a}\right)}.\,x^{-x}$ *, es equivalente a:*

a) 1
b) $\sqrt{x}$
c) x^{x+1}
d) x
e) x^2

27. *Si se cumplen las igualdades:*

$x^{x^9}=\sqrt{3^{\sqrt{3}}}$; $y=x^{\left[\frac{1}{y^{y^x}}\right]}$

El valor de y^{3x} *, es:*

a) 3
b) $\sqrt{3}$
c) 27
d) $\sqrt{2}$
e) 2

28. *Luego de resolver:*

$$2x+1=\frac{3}{2}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}\right]^{4x-1}$$

Si $x>0$ *, entonces el valor de* $\left(\frac{1}{x}\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$ *es:*

a) 16
b) 81
c) 1/64
d) 1/256
e) 256

ECUACIONES EXPONENCIALES

DEFINICIÓN. *Es aquella ecuación donde la incógnita está como exponente en algunos casos y en otros como exponente y base.*

Ejemplos*:*

- $10^{x+4} = 1$
- $x^{x+3} = x^x + 28$

TEOREMA:

$$I)\quad a^x = a^y \Rightarrow x = y \;;\; \forall a > 0 \wedge a \neq 1$$
$$II)\quad a^x = b^x \Rightarrow a = b \;;\; \forall a, b > 0 \wedge x \neq 0$$

OBSERVACIÓN*:*

$$a^x = b^x \;\wedge\; a \neq b \Rightarrow x = 0$$

EJERCICIOS

1. *El valor de "x" en:* $2^{2+x} + 2^{2-x} = 17$ *es:*

a) 1
b) -1
c) 4
d) 3
e) 2

2. *Luego de resolver:* $2^{3^{2^x}} = 512$*, el valor "x" es:*

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

3. *Luego de resolver:* $\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$ *el valor "x" es:*

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

4. *En la ecuación:* $\sqrt[x^{-1}]{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x^{-1}}} = \sqrt[\sqrt{5}]{5}$ *el valor de* "x^{-1}" *es.*

a) $\frac{1}{5}$
b) 5
c) $-\frac{1}{5}$
d) $\sqrt{5}$
e) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

5. *El valor de "x" en:* $8^{27^{x-1}} = \sqrt[3]{2}^{9^{x+5}}$*, es:*

a) 11
b) 13
c) 2
d) 21
e) 10

6. *Si* $\sqrt[3]{\frac{243^n - 81^n}{9^n - 3^n}} = 81$*, el valor de* "$n$" *es.*

a) 8
b) 6
c) 4
d) 2
e) 1

7. *Luego de resolver el siguiente sistema:* $\begin{aligned} 2^x.3^y &= 12 \\ 2^y.3^x &= 18 \end{aligned}$

El valor de: $x^2 + y^3$*, es:*

a) 5
b) 17
c) 31
d) 9
e) 10

8. *En la ecuación:*
$2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + ... + 2^{x+10} = 4092$. *El valor de* "$x$"*, es:*

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

9. *Si:* $x^x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. *El valor de* $x^{-\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{2}}$*, es:*

a) 2
b) 4
c) 6
d) 1/2
e) 1/4

10. *Sabiendo que:* $7.3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$.
Luego el valor de "x"*, es:*

a) 0
b) -1
c) 2
d) 4
e) -3

11. *Si se cumple:* $8x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$. *El valor de* $k = 4x^2 - 1$*, es:*

a) 1
b) -3
c) -2
d) 2
e) 0

12. *En la siguiente ecuación:*
$16^{\sqrt{x}} - 256 = 60.4^{\sqrt{x}}$
El valor de "x"*, es:*

a) 3
b) 5
c) -4
d) -2
e) 9

13. *Si:* $\sqrt[y-1]{\frac{y^{3y-20} - y^{y^y}}{y^y - y}} = y$*, el valor de* "$y$" *es:*

a) 20
b) 19
c) 18
d) 17
e) 16

14. *Luego de resolver:* $x^{x^{2x^2}} = 4$. *El valor de* $x^4 + x^2$*, es:*

a) 20
b) 5
c) 6
d) 4
e) 10

15. *El valor de"x" que verifique la igualdad:* $x^{x^{n^{n+1}}} = \sqrt[n^n]{n}$*, donde:* $n \in \mathbb{N} / n \geq 2024$*, es:*

a) $\sqrt[n+1]{n}$
b) $\sqrt[n]{n^{n+1}}$
c) $\sqrt[n^n]{n}$
d) $\sqrt[n^{n+1}]{n}$
e) $\sqrt[n^{n-1}]{n}$

16. *Si:* $x^{2x^2-2x} - 1 = x$. *El valor numérico de:* $x^{-2} + x^2$*, es:*

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

17. *Luego de reducir:* $\sqrt[n]{\frac{x^n + a^n}{(b^2a)^n + x^n}} = \frac{1}{b}$

El valor de "x"*, es:*

a) b^{ab}
b) ab
c) b
d) 1
e) a

18. *Si:* $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$. *El valor de "$x$", es:*

a) 7/3
b) 3/2
c) 2/5
d) 0,5
e) 5/2

19. *Si:* $\dfrac{(2x)^n + 3^n}{6^n + x^n} = 1$ *donde* $n \neq 0$. *El valor de*
$T = \sqrt[x-1]{x^{x+1}} - x$, *es:*

a) 6
b) 5
c) 7
d) 1
e) 8

20. *Si:* $x^{8^{-8^x}} = 8$. *El valor de* $\sqrt[3x]{x}$, *es:*

a) $2\sqrt[3]{2}$
b) 3
c) $\sqrt[3]{3}$
d) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{4}$
e) 2

21. *Luego de resolver:* $x^{-2^{2^{-x}}} = 2$. *El valor de* $\sqrt[x]{x}$, *es:*

a) 2
b) 1/4
c) 1/2
d) 256
e) -1/2

22. *El valor de "x", en la expresión:*
$\left[x^{1+x^{1+x^{\cdot^{\cdot}}}}\right]^{1/2} = x^{1/2+x^{1/2-x^{\cdot^{\cdot}}}}$, *está dado por:*

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt[4]{5}$
c) $\sqrt[5]{4}$
d) 2
e) 8

23. *Sabiendo que:* $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}$ *;además*
$y^{\frac{1}{z}} . z^{\frac{1}{y}} = \sqrt[8]{2^{7\sqrt{2}}}$. *El valor de* $zy(x^2)^{2^{-\frac{1}{2}}}$., *es:*

a) 1
b) 2
c) 4
d) 8
e) 16

24. *Siendo* $x > 0$ $\sqrt[x-1]{1+\sqrt{2}} . \sqrt[x+1]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[16]{17+6\sqrt{8}}$
, el valor "x", está dado por:

a) 4
b) 3
c) -2
d) -3
e) 6



EXPRESIONES ALGEBRAICAS

DEFINICIÓN. *Es aquella expresión que está formada por variables y/o constantes en cantidades finitas, que están ligadas mediante las operaciones fundamentales (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación) sin variables en los exponentes.*

Ejemplos:

- $P(x)=3x^2-10x^{3/2}+34$
- $R(x,y)=12x^{-6}+10x^{0,5}y^{-0,5}+\dfrac{7}{x+y^4}-2020$

OBSERVACIÓN:

*Toda expresión que no cumpla con las condiciones mencionadas será llamada **expresión no algebraica o trascendente.***

Ejemplos:

- $S(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots$
- $T(x,y)=3^x+\tan x^2-16\log y$

TÉRMINO ALGEBRAICO

DEFINICIÓN. *Es aquella expresión algebraica en la que sus elementos están ligados solo por las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación.*

$$\xrightarrow{\text{signo}} -\underbrace{24}_{\text{coeficiente}}\ \underbrace{x^4y^{12}z^{-3}}_{\text{parte literal}} \xleftarrow{\text{exponentes}}$$

Ejemplo:

- $P(x,y,z)=\dfrac{56}{a^2+b^4}x^2y^{\frac{1}{2}}z^4$

OBSERVACIÓN:

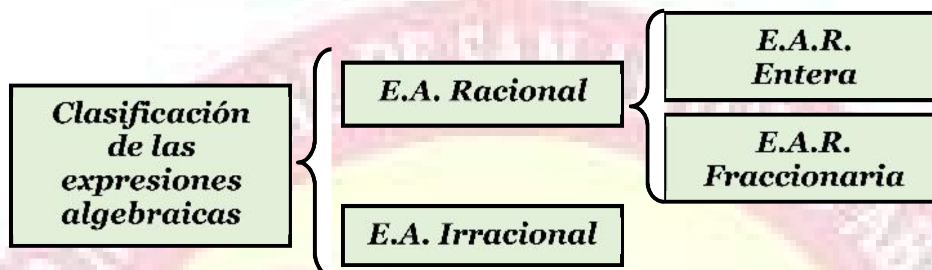
- ✓ *Se dice que dos o más términos son **semejantes**, cuando tienen la misma parte literal.*
- ✓ *Dos o más términos se pueden sumar o restar cuando son semejantes y en este caso se suman o restan los coeficientes y se escribe la misma parte literal.*

Ejemplo:

- $6x^2y^{-8}-12x^2y^{-8}+\pi x^2y^{-8}=(\pi-6)x^2y^{-8}$

CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS:

La clasificación dada está en función a la naturaleza del exponente.



A) *Expresiones Algebraicas Racionales*

Son aquellas expresiones en donde los exponentes de las variables son números enteros. Tenemos la siguiente subclasificación.

- ***E.A.R. Enteras:***
  Son expresiones donde la variable o variables tienen exponentes que son a lo más números enteros positivos, también pueden presentar término independiente.

  Ejemplos:

  - $P(x)=3x^7-4x^3+x^2-23$
  - $Q(x,y,z)=\sqrt{2}x^9-87x^3y^6z^2+x^2y^6-23xyz$

- ***E.A.R. Fraccionaria:***
  Son expresiones cuyas variables admiten por lo menos un exponente que es un número entero negativo. Simbólicamente:

  Ejemplos:

  - $R(x)=13x^{-7}+12x^4+x^2+x-1$
  - $Z(x,y)=4x^9-7x^{-3}y^6+y^6-\dfrac{8}{x^2-y^3}+4$

B) *Expresiones Algebraicas Irracionales*

Son aquellas expresiones que se caracterizan por que su variable o variables están afectados por un radical o los exponentes de sus variables son números fraccionarios.

Ejemplos:

- $T(x)=x^6+6x^{4/3}+9x^2-12x$
- $M(x,y)=-12x^9+74y^6-\dfrac{1}{x^8+12y^3}+4x\sqrt{y}+1$

POLINOMIOS

DEFINICIÓN. *Es toda expresión algebraica racional entera que está definido sobre un campo numérico y en cualquier conjunto numérico para las variables. Los polinomios constan de dos o más términos.*

NOTACIÓN GENERAL PARA UN POLINOMIO EN UNA VARIABLE:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \;\; ; a_n \neq 0$$

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

Donde:

- "n" *es el grado del polinomio.* ($n \in \mathbb{Z}^+$)
- "a_n" *es el coeficiente principal.*
- "$a_n x^n$" *es el término principal.*
- "a_0" *termino independiente.*

VALOR NUMERICO DE UN POLINOMIO:

Se llama valor numérico al resultado de reemplazar valores en las variables del polinomio.

Ejemplo:

- $p(x) = 3x^2 - 2x + 4$

  $p(1) = 3(1)^2 - 2(1) + 4 = 5$

  $p(0) = 3(0)^2 - 2(0) + 4 = 4$

  $p(5) = 3(5)^2 - 2(5) + 4 = 69$

- $Q(x, y) = x^2y^2 - x + y + 10$

  $Q(1,1) = (1)^2(1)^2 - (1) + (1) + 10 = 11$

  $Q(2,3) = (2)^2(3)^2 - (2) + (3) + 10 = 47$

TEOREMA:

Sea un polinomio en una variable $P(x)$

1. *La suma de coeficientes de un polinomio está dada por:* $\sum coef.(P) = P(1)$
2. *El termino independiente de un polinomio está dado por:* $T.I.(P) = P(0)$

GRADOS DE UN POLINOMIO

A. GRADO RELATIVO:

El grado relativo se un polinomio es el mayor exponente de cada variable.

Ejemplo: *Sea el polinomio definido por:*

$$T(x, y) = x^6y^4 + 6x^4y^6 + 9x^2y^8 - 12xy^{10} + 8$$

$$G.R(x) = 6$$

$$G.R(y) = 10$$

B. GRADO ABSOLUTO:

El grado absoluto es el mayor grado absoluto de sus términos.

Ejemplo:

$$T(x,y) = \underset{\substack{GA=6+4\\GA=10}}{x^6y^4} + \underset{\substack{GA=4+6\\GA=10}}{6x^4y^6} + \underset{\substack{GA=2+8\\GA=10}}{9x^2y^8} - \underbrace{12xy^{10}}_{\substack{GA=1+10\\GA=11}} + \underset{GA=0}{8}$$

$$G.A(T) = 11$$

OBSERVACIÓN:

- ✓ *La expresión algebraica racional entera que consta de un solo término se denomina MONOMIO.*
- ✓ *El grado relativo respecto a una variable en un monomio, viene determinado por el exponente de la variable en mención.*
- ✓ *El grado absoluto de un monomio está dado por la suma de los exponentes de las variables.*

Ejemplo:

$$M(x,y,z) = -65\,x^8y^5z^2$$

- $G.R(x) = 8$
- $G.R(y) = 5$
- $G.R(z) = 2$
- $G.A(M) = 15$

CALCULO DE GRADO EN OPERACIONES CON POLINOMIOS

Consideremos los polinomios "$P(x)$" *y* "$Q(x)$" *con* $G.A(P(x)) = m$ *y* $G.A(Q(x)) = n$ *(*$m > n$*) luego tenemos:*

- $G.A(P(x) \pm Q(x)) = m$
- $G.A(P(x) \cdot Q(x)) = m + n$
- $G.A(P(x) \div Q(x)) = m - n$; *con* $m - n \in \mathbb{Z}_0^-$, *siempre que* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *sea un polinomio.*
- $G.A\left(\left[P(x)\right]^k\right) = m.k$
- $G.A\left(\sqrt[k]{P(x)}\right) = \dfrac{m}{k} \in \mathbb{Z}_0^+$; *siempre que* $\sqrt[k]{P(x)}$ *sea un polinomio*

EJERCICIOS

1. Si: $G.A(P)=m$ y $G.A(Q)=n$ con $m>n$. Identificar con (V) si es verdadera o con (F) si es falsa:

$I.\ G.A(P.Q)=m$

$II.\ G.A(P-Q)=m-n$

$III.\ G.A(P+Q)=m$

La secuencia correcta es:

a) VVV
b) VVF
c) VFV
d) VFF
e) FFV

2. Si: P y Q son polinomios reales no constantes, en las siguientes proposiciones, escribir (V) si es verdadera (F) si es falsa:

I. $G.A(P-Q)=G.A(P)-G.A(Q)$

II. Si el grado de "P" es el doble del grado de "Q", entonces el grado de $P+Q$ es igual al grado "P".

III. $G.A(P)=G.A(Q)=n$, entonces $G.A(P+Q)=2n$

La secuencia correcta es:

a) FVV
b) VFV
c) VVV
d) FVF
e) FFF

3. Dado el monomio: $N(x)=9^a\left(-\frac{1}{3}\right)^b x^{3a+2b}y^{3a-b}$,

si su grado absoluto es 8 y el grado relativo a la variable "y" es 1, el coeficiente del polinomio es.

a) 1
b) 0
c) 9
d) 81
e) 27

4. Dado el monomio:

$P(x;y)=4m^n x^{2m+3n}y^{5n-m}$

Si: $G.A(P)=10 \wedge G.R(x)=7$, el coeficiente del monomio es:

a) 5
b) 64
c) 16
d) 8
e) 2

5. Si "P" es un polinomio sobre $\mathbb{R}$ definido por:

$P(x;y)=x^{2n+m-15}+x^{m-n}y^{5-n}+\frac{1}{5-m}x^{6-m}$

entonces el valor de $T=3m-4n$ es:

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

6. En el polinomio

$P(x-1)=(2x-3)^{2n}+(3x-2)^{2n}-32(x-2)$ el termino independiente es el doble de la suma de coeficientes. El valor "n", es:

a) 6
b) 1
c) 4
d) 3
e) 5

7. Si "P" es un polinomio definido por:

$P(x)=(5x-1)^{2n-1}(2x+5)^n+$

$[(3x+1)(x+5)]^n+(x^2+n)(x-2).$

Tal que tienen como termino independiente -36, entonces el grado del polinomio "P" es:

a) 18
b) 45
c) 53
d) 36
e) 37

8. En el polinomio

$P(x)=\left(x^{n-1}+8x^{n-2}+nx^{n-3}+n+1\right)^n$

se cumple que la suma de sus coeficientes es igual 3^n veces su término independiente. El valor de "n", es:

a) 13
b) 9
c) 8
d) 7
e) 6

9. *El grado del siguiente polinomio:*

$P(x) = \left(6x^2+1\right)^3\left(x^2+x+1\right)^5\left(x^3-8\right)$, *es:*

a) 15
b) 7
c) 20
d) 17
e) 19

10. *El valor de* $"n"$, *para que el grado de* $H(x) = (2x^{n+2}y)^3$ *sea* 18, *es*

a) 1
b) 3
c) 4
d) 5
e) 7

11. *Si:* $(a+2)x^{2a+3}y^{3b-1}$; $(b-3)x^{a+5}y^{2a+b-3}$ *; son semejantes, su suma es:*

a) $2x^7y^2$
b) $-x^5y^3$
c) $3x^3y^7$
d) $-2x^7y^3$
e) $5x^4y^3$

12. *Si* $"P"$ *es un polinomio definido por:*

$P(x;y) = 4x^{a+1}y^{b-2} + 3x^{a+2}y^{b-1} + 6x^{a+3}y^{b-2}$ *tal que:* $G.A(P) = 20 \wedge G.R(x) = 8$

Entonces el valor de $H = a.b$, *es:*

a) 71
b) 69
c) 70
d) 72
e) 68

13. *Dado el polinomio* $P(x)$, *sabiendo que su término independiente es 17 y además se cumple que:*

$P(x+1) = (x+1)(ax+2) + (a-1)(x+2) + a$,

la suma de coeficientes es:

a) 34
b) 27
c) 8
d) 9
e) 17

14. *Si:* $P(x;y) = y^{n-2} + y^{\frac{8}{n-1}} + yx^{5-n}$ *es un polinomio, el grado del polinomio* $H(x) = \underbrace{x + x^4 + x^9 + \ldots}_{(n+2)\ sumandos}$, *es:*

a) 55
b) 25
c) 1
d) 16
e) 125

15. *La suma de valores de* $"n"$ *para los cuales la expresión matemática* $P(x;y) = 4x^{\frac{10-2^n}{2}} - 3y^{\frac{128}{2^n}}$ *sea un polinomio, es:*

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

16. *Dado el polinomio:*

$P(x;y) = 7x^2y^{m+3} + 4x^5y^{m-4} + 3x^4y^{m+5} + x^6y^{m-2}$

Si: $G.R(x) + G.R(y) + G.A = 32$

El valor de $"m"$ *es:*

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

17. *Dados los polinomios* $P(x)$ *de grado* $"m"$ *y* $Q(x)$ *de grado* $"n"$ *con* $m > n$. *De las siguientes proposiciones, al marcar con **(V)** si es verdadero o con **(F)** si es falsa.*

I) *El grado de la suma:* $P(x) + Q(x)$ *es* $"n"$.

II) *El grado del producto:* $P(x).Q(x)$ *es* $"m+n"$

III) *El grado del cociente:* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *es* $"m-n"$, $Q(x) \neq 0$.

IV) *El grado de la raíz:* $\sqrt[k]{P(x)}$ *es* $"mk"$.

La secuencia correcta de valores es:

a) FFVV
b) FVFV
c) FVVF
d) FFFV
e) VFVF

18. *Dados los polinomios:*

$$P(x)=\left(2x^{n^n}-5x^n+3\right)^{n^n}$$

$$Q(x)=\left(7x^{n^n}+6x-4\right)^2$$

$$R(x)=9x-4$$

Si el grado el producto de los tres polinomios es 25, entonces el valor de $"n"$*, es:*

a) 9
b) 5
c) 2
d) 4
e) 3

19. *El grado absoluto del polinomio:*

$$P(x;y)=(x^2+y^4)^5(x^4+y^6)^5(x^6+y^8)^5\cdots(x^{18}+y^{20})^5$$

es:

a) 550
b) 540
c) 520
d) 440
e) 420

20. *Dado el polinomio:*

$$P(x)=(2x^4-3)^m(mx^5-1)^5(2x^m-x-m)^3$$

Si el término independiente es 72 *, el coeficiente principal es:*

a) 1024
b) 243
c) 624
d) 512
e) 64

21. *Si se cumple:* $P(x+2)=6x+1$ *y además* $P(F(x))=12x-17$ *.*

Entonces el valor de $F(10)$*, es:*

a) 23
b) 20
c) 22
d) 21
e) 19

22. *Dada la expresión:* $P(x)$*, tal que:* $P(x)=P(x-1)+P(x-2)$*, además:* $P(1)=3$ $P(2)=4$*. El valor de* $P(P(P(0)))$*, es:*

a) 7
b) 4
c) 3
d) 1
e) 14

23. *Sea* $P(x)=mx^{\frac{n}{7}}+x^2+x+1$*, un polinomio de grado mínimo y de 4 términos. Si se tiene que:* $P(n-22)=5$*, el valor de* $"n.m"$*, es:*

a) -84
b) -21
c) 25
d) 84
e) 21

24. *Dado los polinomios* $P(x)$ *y* $Q(x)$*, se sabe que los polinomios:* $P(x).Q^2(x)$ *y* $\dfrac{P^3(x)}{Q(x)}$*, son de grado 17 y 2 respectivamente. El grado de* $P(x).Q(x)$*, es:*

a) 4
b) 5
c) 10
d) 8
e) 15

25. *Sea el polinomio:*

$$P(x,y)=3x^{2m+n-4}y^{m+n+2}+5x^{2m+n-3}y^{m+n+1}-7x^{2m+n-2}y^{m+n}$$

de grado 10 y cuya diferencia entre los grados relativos a " x *" e "* y *" es 4. El valor "* $m+n$ *", es:*

a) -16
b) 15
c) 8
d) 13
e) 16

26. *Sabiendo que los grados de los polinomios* $P(x)$ *y* $Q(x)$ *son* $"m"$ *y* $"n"$ *respectivamente, entonces el grado de:*

$$\left[P(x)\right]^3\cdot\left[Q(x)\right]^2+\left[P(x)\right]^2\cdot\left[Q(x)\right]^3$$ *con* $m>n$*, es:*

a) $m+n$
b) $2m+2n$
c) $3m+2n$
d) $2m+n$
e) $3m+n$

27. *Si:* $P(P(P(x)))=8x+7$*, el polinomio* $P(x)$*, viene dado por:*

a) $P(x)=2x+1$
b) $P(x)=x^2-4$
c) $P(x)=x^2+1$
d) $P(x)=2x-2$
e) $P(x)=x+1$

28. *Si el equivalente de:*

$$M(x,y)=\sqrt{(x.y)^3\sqrt[3]{(x\,y^2)^{2m}\sqrt[4]{(x^n\,y^2)^m}}}$$

es un monomio cuyo grado relativo a "x" *es* 4 *y grado relativo a* "y" *es* 9 *.El valor* "$m+n$" *es:*

a) 8
b) -8
c) 4
d) -4
e) 2

29. *Si:* $F(5x-1)=1+5x+9x^2+13x^3+\ldots$, *el valor de* $F(1,5)$, *es:*

a) 1
b) 1/2
c) 3/2
d) 10
e) 1/10

POLINOMIOS ESPECIALES

POLINOMIO ORDENADO:

Un polinomio es ordenado en forma creciente (o decreciente) en relación a una de sus variables, cuando los exponentes de la variable en mención presentan sus exponentes en forma creciente (o decreciente).

***Ejemplos**:*

- $P(x)=6x^6-x^5+24x^3+10x-12$
  Es ordenado en forma decreciente.
- $Q(x;y)=12xy^9+2x^3y^7-34x^5y^5-2x^6y^3+x^7y^2$
  Es ordenado en forma decreciente con respecto a la variable "x" y no es ordenado con respecto a "y".

POLINOMIO COMPLETO:

Un polinomio se llama completo si una de sus variables tiene a todos los exponentes, desde el mayor exponente (G.R) hasta el exponente cero (termino independiente).

***Ejemplos**:*

- $P(x)=x^6-2x^5+4x^4+6x^3-24x^2+10x-1$
  Es un polinomio completo.
- $Q(x;y)=3x^5y^9+2x^4y^7-x^3y^5-2x^2y^3+xy^2+12$
  Es un polinomio completo en la variable "x", sin embargo, no es completo con respecto a la variable "y".

TEOREMA

Dado un polinomio completo definido en una variable, se tiene:

$$\text{Número de términos} = \text{Grado absoluto} + 1$$

POLINOMIO HOMOGÉNEO:

Es aquel polinomio en el cual todos sus términos tienen el mismo grado absoluto.

***Ejemplos**:*

- $S(x;y)=\underset{\substack{G.A=5+9\\G.A=14}}{4x^5y^9}+\underbrace{12x^7y^7}_{\substack{G.A=7+7\\G.A=14}}-\underset{\substack{G.A=9+5\\G.A=14}}{3x^9y^5}-\underset{\substack{G.A=8+6\\G.A=14}}{2x^8y^6}$

  Es un polinomio Homogéneo.

POLINOMIOS IDENTICOS:

Son aquellos polinomios que poseen las mismas variables y sus valores numéricos son iguales para cualquier valor de sus variables.

Ejemplos:

Dados los polinomios:

- $T(x;y) = (x+y)^2 - (x-y)^2$
- $S(x;y) = 4xy$

Si asignamos valores numéricos arbitrarios a sus variables.

- $T(1;2) = (1+2)^2 - (1-2)^2 = 8$
- $S(1;2) = 4(1)(2) = 8$

Obtenemos mismos valores numéricos para los polinomios, en consecuencia, los polinomios son idénticos.

NOTACIÓN:

Usaremos $P(x) \cong Q(x)$ *para denotar que los polinomios "* $P(x)$ *" y "* $Q(x)$ *" son idénticos.*

TEOREMA

Sean los polinomios $"P(x)"$ *y* $"Q(x)"$ *definidos en una variable y del mismo grado:*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

son idénticos sí y solo sí:

$$a_n = b_n \;;\; a_{n-1} = b_{n-1} \;;\ldots;\; a_1 = b_1 \;;\; a_0 = b_0$$

POLINOMIO IDENTICAMENTE NULO

Es aquel polinomio cuyo valor numérico es cero para cualquier valor o valores de sus variables.

Ejemplos:

- $R(x;y) = (x+y)^2 + (x-y)^2 - 2x^2 - 2y^2$

  Es idénticamente nulo, pues asignando valores a sus variables:

- $R(2;3) = (2+3)^2 + (2-3)^2 - 2(2)^2 - 2(3)^2 = 0$

  Obtenemos el valor de cero.

NOTACIÓN:

Usaremos $P(x) \cong 0$ *para denotar que el polinomio es idénticamente nulo.*

TEOREMA

Sea el polinomio $"P(x)"$ *definido por:* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

es idénticamente nulo sí y solamente si $a_n = 0 \;;\; a_{n-1} = 0 \;;\ldots;\; a_1 = 0 \;;\; a_0 = 0$

EJERCICIOS

1. El polinomio: $x^{m+3}+x^{m+1}y^{n}+y^{4}$ es homogéneo. El valor de "$m+n$", es:

a) 4
b) 3
c) 5
d) 6
e) 7

2. Dado: $P(x)=5x^2-10x+12$
Si $P(x)\equiv a(x-b)^2+c$. El valor de $(a+c)^{b+1}$, es:

a) 144
b) 12
c) 6^8
d) 25
e) 81

3. Si se cumple que:
$(2a-b)x^2+4bx+2c\equiv 7x^2+20x-5$
el valor de $2a+b$, es

a) 21
b) 17
c) 19
d) 13
e) 11

4. Siendo: $P(x)=45x^5-2x^{p+1}-x^{q-2}+3x^2+x+1$, un polinomio completo y ordenado. El número de términos que tiene el polinomio completo y ordenado $Q(x)=x^{p+q-1}+2x^{p+q-2}+\ldots+3x+2$, es:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

5. Si: $P(x)=x^n+x^m+x^2+x+1$ es un polinomio completo, el mínimo valor de "$m+n$", es:

a) 7
b) 16
c) 2
d) 1
e) 6

6. Si el binomio:
$P(x;y)=(x^a y^a)^{(a+b)}+(x^3 y)^{ab}$
es homogéneo y además $G.R(x)=108$.
El grado absoluto del polinomio, es:

a) 144
b) 16
c) 25
d) 18
e) 100

7. Los polinomios:
$P(x)=2(mx+n)^2+mx^2-2n$
$R(x)=4(9x^2+8x+p)$
Son idénticos. Si además se sabe que $m>0$, entonces el valor de $P(-1)$, es:

a) 8
b) 12
c) 0
d) -6
e) -4

8. Si el polinomio es homogéneo, el grado relativo respecto a "x" del polinomio
$Q(x;y)=x^{14+m}y^{n}-5x^{n}y^{2m+4}+7y^{49}$, es:

a) 20
b) 22
c) 25
d) 27
e) 28

9. Si "P" es un polinomio homogéneo definido por:
$P(x;y)=2^{-1}(a+b)x^{a^2+n}+3^{-1}(a-b)x^{b^2+n}y^{n}+12y^{b^2+12}$
Entonces el producto de sus coeficientes es:

a) 12
b) 4
c) 6
d) 2
e) 3

10. Dado el polinomio:
$Q(x)=x^{m-10}+x^{m-n+5}+x^{p-n+6}$
Que es completo y ordenado en forma decreciente.
El valor de la expresión "$m-n+p$", es:

a) 8
b) 2
c) 6
d) 4
e) 10

11. *Si "P" es un polinomio completo y ordenado en forma descendente definido por:*

$$P(x)=qx^3+\sqrt{p+6}x^{2m-6}+$$
$$\sqrt[3]{5n+8}x^{5m+n-19}+\left(\frac{m}{4}+2\right)x^{p+n-3}$$

Tal que la suma de sus coeficientes es "$m+n+p$", entonces el valor de $\sqrt[3]{q}$, es:

a) -1
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

12. *Sabiendo que el polinomio*

$$B(x;y)=7x^{a+2}y^{b+3}+8x^c y^{d+1}-5x^{2a+3}y^{b+1}$$

es homogéneo. El valor de "a", es:

a) 0
b) 2
c) 1
d) -3
e) -4

13. *Sea "$P(x)$" un polinomio homogéneo definido por:*

$$Q(x;y)=ax^c+bx^{c-1}y^a-cx^a y^b-dy^{2c-3}$$

Tal que la suma de coeficientes es -8, entonces el valor de $M=a+b+c+d$ es:

a) 10
b) 16
c) 12
d) 18
e) 14

14. *La suma de coeficientes del siguiente polinomio completo*

$$P(x)=c(x^a+x^b)+a(x^b+x^c)+b(x^a+x^c)+abc,$$

es:

a) 6
b) 9
c) 12
d) 18
e) 21

15. *El grado del polinomio entero y ordenado en forma decreciente*

$H(x)=x^{2m}+x^{m-3}+x^{4-m}$ *, es:*

a) 3
b) 5
c) 8
d) 10
e) 6

16. *Dado el polinomio:*

$$Z(x)=dx^{n^2-1}+a^2x^{n+b}+b^2x^{a-3}+n^2x^{d-5}$$

completo y ordenado en forma decreciente, la suma de los coeficientes del polinomio es:

a) 21
b) 51
c) 61
d) 41
e) 14

17. *Si $P(x-b)=b(x+2)-a(x-2)$, tal que $p(x)=ax$; $a\neq 0$, el valor de "b", es:*

a) -6
b) -10
c) 6
d) 10
e) 8

18. *Dado el polinomio:*

$$P(x)=20x^{a+b-7}-(a-2b)x^{b-c+4}+(a-c+b)x^{c+d-3}$$

Completo y ordenado, el mayor de $N=(a+b+c+d)(a-c+b-d)$, es:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

19. *Si el trinomio:*

$$H(x)=\sqrt[a]{x^{a+b}}+\sqrt[b]{x^{b+c}}+\sqrt[c]{x^{a+c}}$$

Es homogéneo de grado 10, el grado del monomio $M(x;y;z)=\sqrt[a]{x^b}.\sqrt[c]{y^a}.\sqrt[b]{z^c}$, es:

a) 7
b) 13
c) 18
d) 9
e) 27

20. *Sea "P" un polinomio Mónico de grado 3; si su término independiente es igual a 5 y además se cumple $P(x+1)=P(x)+nx+2$. La suma de coeficientes del término cuadrático y lineal es:*

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

21. *Dado el polinomio completo:*

$$P(x)=(m-1)x^{m-6}+(m-2)x^{m-5}+(m-3)x^{m-4}+...$$

El número de términos que tiene el polinomio es:

a) 6
b) 5
c) 7
d) 1
e) 8

22. *En la siguiente identidad:*

$$7x^2-6x+1\equiv m(x-1)(x-2)+n(x-3)(x-2)+$$
$$+\,p(x-3)(x-1)$$

El valor de $"m+n+p"$, *es:*

a) 3
b) 5
c) 7
d) 9
e) 11

23. *Si el polinomio:*

$$G(x)=(ab-ac-n^2)x^2+(bc-ba-2n)x+$$
$$+(ca-cb-1)$$

es idénticamente nulo, entonces el valor de $M=\frac{1}{a}-\frac{2}{b}+\frac{1}{c}$, *es:*

a) 0
b) 4
c) 2
d) 6
e) 1

24. *Sabiendo que el polinomio:*

$$P(x)=n(n^2-1)x^{a^2-a+1}-2x^{n(n+1)a^2-a+2}+(n-2)x^{a^2+a-1}$$

es homogéneo, la suma de sus coeficientes es:

a) 5
b) 3
c) 2
d) -4
e) -5

25. *¿Cuántos términos faltan en este polinomio:*

$$J(x)=(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n)(x^{n+4}+x^n)$$

para ser completo, sabiendo que en este otro polinomio

$$H(x-2)=n^2(3x-8)^2+(x-2)\left[(x-2)^{2n-1}+12\right]$$

la suma de coeficientes excede en la unidad a su término independiente?

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

26. *Sabiendo que cumple la siguiente identidad:*

$$x^5-4x^3+2x^2-3x+2\equiv a(x-1)^5+b(x-1)^4+$$
$$c(x-1)^3+d(x-1)^2+e(x-1)+f$$

El valor de $N=\frac{a+c+e}{f}$, *es*

a) 2
b) -3
c) -1/2
d) -1/3
e) -2



ÁLGEBRA

3 PRODUCTOS NOTABLES

1. BINOMIO AL CUADRADO

$$(a \pm b)^2 = \underbrace{a^2 \pm 2ab + b^2}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}}$$

OBSERVACIÓN: $(a-b)^2 = (b-a)^2$

2. DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a^m - b^n)(a^m + b^n) = a^{2m} - b^{2n}$$

3. TRINOMIO AL CUADRADO

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

4. BINOMIO AL CUBO

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

OBSERVACIÓN:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$$

5. SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

6. TRINOMIO AL CUBO

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$$
$$= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$$

7. PRODUCTO DE BINOMIOS CON UN TÉRMINO EN COMÚN

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$
$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + $$
$$+ (ab+ac+bc)x - abc$$

8. IDENTIDADES DE LEGENDRE

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

9. IDENTIDADES DE LAGRANGE

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$$
$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 +$$
$$+ (bz-cy)^2 + (az-cx)^2$$

10. IDENTIDADES DE ARGAND

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$$

Caso particular:

$$(a^2+a+1)(a^2-a+1) = a^4 + a^2 + 1$$

11. IGUALDADES CONDICIONALES

Si:

$a+b+c=0$ entonces

- $a^2+b^2+c^2 = -2(ab+ac+bc)$
- $a^3+b^3+c^3 = 3abc$

EJERCICIOS

1. Si: $x=\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}$. El valor x^3-3x+4, es:

a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

2. Si: $(a+b)^2+(a-b)^2=4ab$

El valor de $\frac{a^2+b^2}{2ab}+\frac{a^3-b^3}{3ab}$, es:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) -1

3. Si: $a+b=5\sqrt{ab}$

El valor de $\frac{23}{\sqrt{ab}}\left(\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}\right)$, es:

a) 100
b) 110
c) 200
d) 130
e) -100

4. El valor de M en:

$M=\sqrt[32]{1+24(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)}+10$, es:

a) 15
b) 21
c) 30
d) 10
e) 5

5. Si: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}$, el valor de

$M=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{x+2y}{2x}+\frac{2y}{x+3y}$, es:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 6

6. Si: $x^3+y^3=20$; $xy=5$

El valor de $Z=(x+y)^3-15(x+y)+15$, es:

a) 40
b) 35
c) 20
d) 30
e) 15

7. Si: $a>0$; al reducir la expresión:

$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}+4\left(a+\frac{1}{a}\right)+6}$ se obtiene:

a) $(a+1)^2$
b) $(a-1)^2$
c) $\frac{(a+1)^2}{a}$
d) $\frac{(a-1)^2}{a}$
e) $\frac{a^2+1}{a}$

8. Si: $x+\frac{1}{x}=4$. El valor de $(x^2+x^{-2})(x^3+x^{-3})$, es:

a) 243
b) 240
c) 728
d) 12
e) 10

9. El valor de:

$E=\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}\right]\left[\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}\right]$

para

$a=\sqrt{5}-\sqrt{3}; b=\sqrt{2}-\sqrt{5}; c=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, es:

a) 3
b) 6
c) -6
d) -2
e) 1

10. *Si se cumple:*

$a^2+b^2=8$

$x^2+y^2=27$

El valor de:

$\sqrt[3]{(ax+by)^2+(ay-bx)^2}$ *, es:*

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

11. *Si:* $a+b+c=0$ *entonces el valor de*

$M=\dfrac{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}{ab+bc+ca}$ *es:*

a) 1
b) 2
c) -1
d) -2
e) 0

12. *Si* $a^2+b^2+c^2=2$ *y*

$(a+b+c)(1+ab+bc+ac)=32$ *, el valor de*

$E=a+b+c$ *es:*

a) 2
b) 4
c) 8
d) 16
e) 32

13. *Si* $\{a;b;c\}\subset\mathbb{R}-\{0\}$ *tal que:*

$a^2+c^2+1=2(a+2b+3c)-13-b^2$

El valor de $\dfrac{(a+b)^4-(a-b)^4}{abc}$ *, es:*

a) 20/3
b) 40/3
c) 8
d) 5/4
e) 4

14. *Si se cumple* $x-y=2 \wedge x.y=3$

El valor de $x+y$ *, es:*

a) 2
b) 6
c) 8
d) 10
e) 4

15. *Si* $\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}=3(x-y)$

El valor de $\dfrac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2}$ *, es:*

a) 1
b) 2
c) ¾
d) 1
e) 1/4

16. *Si:* $p-q-r=2$ *y* $pq+pr=qr$ *entonces el valor de* $H=p^2+q^2+r^2$ *es:*

a) 4
b) -2
c) -4
d) 9
e) 2

17. *Para:*

$x=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$y=\sqrt{2}-\sqrt{3}-1$

$z=\sqrt{3}+1-\sqrt{2}$

El valor numérico de:

$2(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)$ *, es:*

a) 24
b) 20
c) 14
d) 90
e) 25

18. *Si:* $x^3=2^3; x\neq 2$ *indique el valor numérico de* $x^2+\dfrac{16}{x^2}$.

a) -2
b) 4
c) $\sqrt{2}$
d) 4
e) 16

19. *Si:* $a+\sqrt{ac}=b+\sqrt{bc}$; $a\neq b$; $abc\neq 0$

El valor de $K=\dfrac{a}{\sqrt{bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{ac}}+\dfrac{c}{\sqrt{ab}}$ *, es:*

a) 3
b) 5
c) 4
d) 2
e) 1

20. *Si se sabe que:*
$(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$
Además: $a=\sqrt{2}$; $b=\sqrt[3]{2}$; $c=\sqrt[6]{2}$ *. El valor de* "d", *es:*

a) 2
b) 5
c) 1
d) 4
e) 3

21. *Si:* $\left(\frac{a}{b}\right)^n+\left(\frac{b}{a}\right)^n=11$. *El valor positivo de:*

$\frac{a^n-b^n}{\sqrt{(ab)^n}}$; $a>b$ *, es:*

a) 1/3
b) 2
c) 3
d) 0,5
e) 5

22. *Luego de simplificar la expresión:*

$$\frac{\left[(a+b)^2+(a-b)^2\right]^2-4(a^2-b^2)^2}{a^{-1}b^{-1}\left[(a^3-b^3)^2-(a^3+b^3)^2\right]}$$ *, se obtiene:*

a) -a
b) -2
c) -3ab
d) -4
e) -5ab

23. *Si se tiene que* $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5=243$. *El valor de*

$x^5+\frac{1}{x^5}$*, es:*

a) 123
b) 63
c) 241
d) 27
e) 243

24. *Sea:* $J\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$*, el valor de* $J(2)$*, es:*

a) x^2
b) x
c) x^{-1}
d) x^{-2}
e) x^{-4}

25. *Sean* "x" *e* "y" *números reales de modo que:*

$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{x}\right)=4$ *.El valor de* $\frac{x+2y}{2x+y}$*, es:*

a) 3
b) 1/2
c) 1/3
d) 1
e) -1

26. *Si se sabe que:*

$$\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2-\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^2=3(b-a)\ \wedge\ ab\neq 0$$

El valor de la expresión: $N=\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}$*, es:*

a) 1
b) 2
c) 1/3
d) 3/4
e) ½

27. *Sabiendo que:* $(a+b+c+d)^2=4(a+b)(c+d)$ *El valor de* $\frac{a-c}{d-b}+\frac{b-c}{d-a}$*, es:*

a) 2
b) 4
c) 6
d) 5
e) 0

28. *Si* $y^{-1}-x^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ *el valor reducido de*

$\frac{16x^4y^4+(x^2-y^2)^2}{x^4y^2+x^2y^4}$*, es:*

a) 3
b) 2
c) 8
d) 4
e) 1

29. *Si:* $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1$. *El valor de*

$$\left(2\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)^3\right)^3+\left(2\left(\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)^3\right)^3$$ *, es:*

a) -1
b) -2
c) 0
d) 2
e) 1

30. *Si:* $x + y + z = 1$ *, luego el valor de*

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3 + 3(xy + xz + yz) - 1}{xyz}$$ *, es:*

a) 1
b) 2
c) 1/2
d) 1/3
e) 3





DIVISIÓN DE POLINOMIOS

ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

TEOREMA

Dados los polinomios $D(x)$ *y* $d(x)$ *con* $d(x) \neq 0$*, entonces existen los únicos polinomios* $q(x)$ *y* $r(x)$ *tal que:*

$$D(x) = q(x)d(x) + r(x)$$

DEFINICIÓN. *Sean los polinomios* $D(x)$ *y* $d(x)$*. La división de polinomios como aquella que consiste en encontrar dos polinomios* $d(x)$ *y* $r(x)$ *que satisfacen:*

$$\boxed{D(x) = q(x)d(x) + r(x)}$$

Donde:

- $D(x)$ *: Dividendo*
- $d(x)$ *: Divisor*
- $q(x)$ *: Cociente*
- $r(x)$ *: Residuo*

CLASES DE DIVISION

A. DIVISIÓN EXACTA

Es cuando el residuo es idénticamente nulo ($r(x) \cong 0$ *). Luego tenemos:*

$$\boxed{D(x) = d(x).q(x)}$$

B. DIVISIÓN INEXACTA

Es cuando el residuo no es idénticamente nulo ($r(x) \neq 0$ *), tenemos:*

$$\boxed{D(x) = d(x).q(x) + r(x)}$$

PROPIEDAD DE GRADOS

- $G.A.(q(x)) = G.A.(D(x)) - G.A(d(x))$
- $G.A.(r(x))_{máx} = G.A.(d(x)) - 1$
- $G.A.(r(x)) < G.A.(d(x))$

METODOS PARA DIVIDIR POLINOMIOS

I. METODO DE HORNER

Este método se utiliza cuando el divisor es de segundo grado o mayor. Para realizar el método tenemos que usar el siguiente cuadro donde ubicaremos los coeficientes.

d | D i v i d e n d o
i
v
i
s
o
r
c o c i e n t e | r e s i d u o

Procedimiento:

1. *Se verifica que los polinomios dividendo y divisor estén ordenados y completos, en caso de que no los estén se debe completar y ordenar.*

2. *Anotar los coeficientes del dividendo en la parte superior del cuadro con sus respectivos signos.*

3. *Anotar los coeficientes del divisor en la parte izquierda del cuadro, colocando el primer coeficiente con su respectivo signo y los que siguen con el signo opuesto.*

4. *Trazar la línea vertical que divide los coeficientes del cociente y residuo. Para ubicar esta línea debemos recorrer de derecha a izquierda tantos espacios como el grado máximo del residuo.*

5. *El primer término del cociente (q) se obtiene dividiendo el primer coeficiente del dividiendo (D) entre el primer coeficiente del divisor (q).*

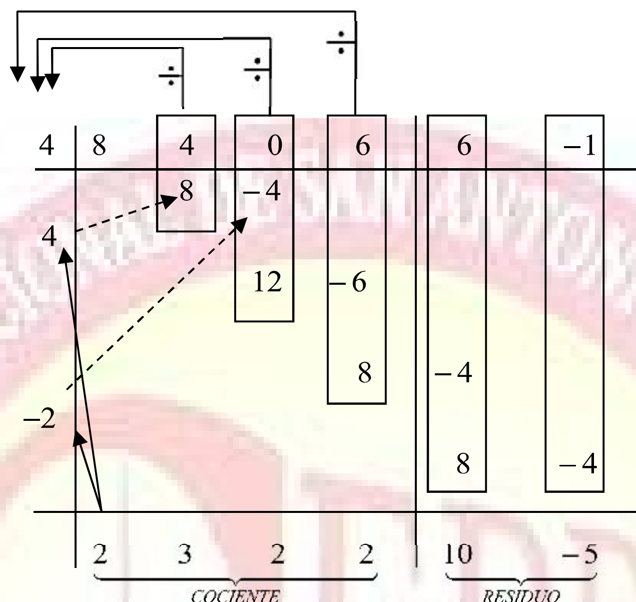
6. *El primer coeficiente del cociente obtenido debe multiplicar a cada uno de los coeficientes del divisor que cambiaron de signo y los resultados se colocan en forma horizontal partir de la siguiente columna hacia la derecha.*

7. *Las cantidades que se encuentran en la segunda columna se suman y el resultado se divide entre el primer coeficiente del divisor (d) y continuando así con el procedimiento hasta coincidir con la última columna del dividendo.*

8. *Para concluir se deben de sumar las columnas correspondientes del residuo.*

Ejemplo:

Dividir: $\dfrac{8x^5+4x^4+6x^2+6x-1}{4x^2-4x+2}$



Luego tenemos:

$q(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$

$r(x) = 10x - 5$

II. METODO DE RUFFINI

Este método se utiliza cuando el divisor es de primer grado ($d(x) = ax + b$). Para realizar el método tenemos que usar el siguiente cuadro donde ubicaremos los coeficientes.

	D i v i d e n d o
$x = \frac{-b}{a}$	
	c o c i e n t e ⋮ residuo

Procedimiento:

1. *Se verifica que los polinomios dividendo y divisor estén ordenados y completos, en caso de que no los estén se debe completar y ordenar.*
2. *Anotar los coeficientes del dividendo en la parte superior del cuadro con sus respectivos signos.*
3. *El divisor $d(x) = ax + b$ debemos igual a cero y despejar la variable "x" y anotar el resultado en la parte izquierda del cuadro.*
4. *Se baja el primer coeficiente del dividendo y se multiplica por el valor de $x = -\frac{b}{a}$, el resultado obtenido se coloca en la siguiente columna, debajo del segundo coeficiente del dividendo.*
5. *Se suman las cantidades de la segunda columna y continuamos con el mismo procedimiento hasta obtener un término debajo del último coeficiente del dividendo.*

6. *El resto es la suma de la última columna.*

7. *Para obtener el cociente dividimos entre el coeficiente principal del divisor cada columna a excepción de la columna del residuo.*

Ejemplos:

Dividir: $\dfrac{2x^4-2x^2+9}{2x-4}$

	2	0	−2	0	9
$x=2$	↓	4	8	12	24
$\div 2$	2	4	6	12	33 (RESIDUO)
	1	2	3	6	

COCIENTE: 1 2 3 6

Luego tenemos:

$$q(x)=x^3+2x^2+3x+6$$
$$r(x)=33$$

TEOREMA DEL RESTO

Este teorema permite calcular el residuo de una división de manera directa. El enunciado es el siguiente.

TEOREMA

Dada la división $P(x)\div(ax+b)$, *entonces tenemos que el resto de la división viene dada por:*

Resto= $P(-b/a)$

Ejemplo:

Encontrar el resto de la división: $\dfrac{2x^4-2x^2+9}{2x-4}$

Solución:

Igualemos el divisor a cero:

$$2x-4=0$$
$$x=2$$

Luego tenemos que:

$$residuo=2(2)^4-2(2)^2+9$$
$$residuo=33$$

EJERCICIOS

1. *Sea* $q(x)$ *el cociente y* $r(x)$ *el residuo de dividir* $\dfrac{6x^4-7x^3-4x^2+10x-3}{3x^2+x-2}$.
Luego el polinomio $q(x)+r(x)$ *es:*

a) $2x^2+6x$
b) $2x^2$
c) $2x^2+3x+2$
d) $2x^2+2$
e) $2x^2+6x+2$

2. *El residuo luego efectuar la división* $\dfrac{12x^5-9x^3-x^2+x}{6x^3+3x^2+1}$ *es:*

a) $-2x+1$
b) x^2+2x+1
c) $2x+1$
d) $-x^2+2x-1$
e) x^2+2x

3. *Si la división:* $\dfrac{6x^4+16x^3+25x^2+Mx+N}{3x^2+2x+1}$
es exacta, entonces el valor de $Z=M+N$ *es:*

a) 5
b) 9
c) 14
d) 19
e) 20

4. *El residuo de dividir:* $3x^3-4x^2+5x+6$ *entre* $3x+2$ *es:*

a) 0
b) 2
c) 4
d) 1
e) -1

5. *El resto de dividir:* $\dfrac{2x^{28}-14x^7+2x^{21}-5}{x^7-3}$ *es:*

a) 144
b) 169
c) 121
d) 154
e) 136

6. *El valor de* "n", *para que el residuo de la división* $\dfrac{x^3-nx^2-nx-n^2}{x-n-2}$ *sea* $3n+2$, *es:*

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

7. *El resto luego de dividir:* $\dfrac{(x^2-3x-1)^4+2(x-3)^5+x}{x-4}$ *es:*

a) 88
b) 89
c) 87
d) 95
e) 98

8. *El valor numérico del polinomio:*
$P(x)=x^5+(2-2\sqrt{2})x^4-4\sqrt{2}x^3+5x-3\sqrt{2}$
para $x=2\sqrt{2}$ *es:*

a) $8\sqrt{2}$
b) $\sqrt{2}+7$
c) $7\sqrt{2}$
d) $13\sqrt{2}$
e) $9\sqrt{2}$

9. *El valor de* "$p+q$" *para que la división* $\dfrac{3x^4-px^2+qx+3x}{x^2-2x+2}$ *sea exacta, es:*

a) 15

b) 13
c) 11
d) 16
e) 6

10. Si el polinomio $P(x)=3x^5+6x^3-3x$ se divide entre $x+1$ se obtiene un cociente de grado $"m"$, termino constante $"b"$ y resto $"a"$. El valor de " $m+b+a$ " es:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

11. El resto que se obtiene al dividir $\dfrac{x^5-x+1}{(x-1)^2}$ es:

a) $4x-3$
b) $4x+3$
c) $x+3$
d) $x-3$
e) $8x+3$

12. Si la división $\dfrac{x^4+x^3-5x^2+mx+n}{x^2-2x+2}$, tiene resto 4. Entonces el valor de $\sqrt{n+\sqrt[3]{m}}$ es:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

13. Si la división $\dfrac{mx^4+nx^3+11x^2-3x+5}{2x^2-x+1}$ es exacta, el valor calculado para $"m+n"$ es:

a) 7
b) 11
c) 5
d) 0
e) 21

14. Si el resto de la división: $\dfrac{ax^3+(b+4)x^2+(12-a)x+b-a}{x^2+2x-1}$ es $r(x)=2x+10$. El cociente de la división viene dado por:

a) $q(x)=-x+5$
b) $q(x)=4x+91$
c) $q(x)=4x+5$
d) $q(x)=x+5$
e) $q(x)=x-5$

15. Si: $r(x)=ax+b$ es el residuo de la división $\dfrac{(x+1)^5+1}{x^2+2x}$, El valor numérico $r(3)$ es:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

16. Al efectuar la división:
$$\frac{mx^5+nx^4+px^3+2x^2-x+1}{x^3-x^2+2x-3}$$
Se tiene que el resto es $"7x-2"$. El número $"m+n+p"$ es:

a) -5
b) -1
c) 1
d) 0
e) 9

17. La división algebraica:
$$\frac{2x^5+ax^3+2bx^2+4x-3}{x^2+x+1}$$
Deja resto $r\equiv 0$. El valor de ab es:

a) 7
b) 0
c) 5
d) -5
e) 6

18. *Si la división algebraica:*

$$\frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+72x^2+19x+5}{4x^3+3x+1}$$

Es exacta, entonces el valor de $A+B-C$ *es:*

a) 11
b) 13
c) 17
d) 19
e) 23

19. *Dada la división algebraica* $\frac{x^{50}+ax+b+1}{x-1}$, *con* a *y* b *reales, si la suma de coeficientes del cociente es el triple del residuo e igual a* 54, *La relación* $\frac{b}{a}$ *esta dado por:*

a) 2
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{4}$
d) 4
e) 3

20. *En la división siguiente*

$$\frac{2x^5+3x^4+bx^3+6bx^2+x+a}{x^2-x+b}$$

Se sabe que el resto es $2x+3$, *además la suma de coeficientes del cociente es mayor que* 15. *El valor de "*ab*" es:*

a) 4
b) 9
c) 7
d) 2
e) 8

21. *El residuo de la división:*

$$\frac{(x-2)^{2021}+(x-1)^{2020}+7}{(x-2)(x-1)}$$ *es:*

a) 3
b) $2x-1$
c) $3x+2$
d) $2x-4$
e) $2x+4$

22. *Si el grado de* $P(x)$ *y* $Q(x)$ *es igual a* 3 *y* 4 *respectivamente y se conoce que el grado de la expresión:* $\frac{\left[P^7(x)+Q^5(x)\right]^{2n}}{\left[P^5(x)+Q^4(x)\right]^{n+3}}$ *es igual a* 4.

Luego el valor de "n" *es:*

a) 6
b) 2
c) 3
d) 4
e) 8

23. *Si la división:*

$$\frac{mx^4+(m+n)x^3+(m+n+s)x^2+(n+s)x-m-n}{mx^2+nx+s}$$

no deja resto. El valor de "$m+n+s$*" viene dado por:*

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

24. *Sabiendo que el polinomio* $P(x)=x^n+mx^{n-2}+1$ *es divisible entre* $(x-1)^2$, *entonces el valor* "mn" *es:*

a) -8
b) -6
c) -4
d) -2
e) -1

25. *Si la división* $\frac{x^a-bx+c}{x^2-2x+1}$ *es exacta, entonces el valor de* $H=\frac{a+b}{c+1}$ *es:*

a) 2
b) 4
c) $\frac{1}{2}$
d) 256
e) 8

26. *En la siguiente división:*

$$\frac{2x^{2n}+2x^{2n-1}+2x^{2n-2}+...+2x^3+2x^2+2x-n+1}{2x-2}$$

La suma de los coeficientes del cociente que resulta es igual a 10 *veces su resto. El grado del cociente es:*

a) 39
b) 37
c) 35
d) 31
e) 33

27. *Un polinomio* $P(x)$ *mónico y de cuarto grado, es divisible separadamente entre* $(x+5)$ *y* (x^2-5). *Si lo dividimos entre* $(x-5)$ *el resto es* 3000. *El resto de dividir* $P(x)$ *entre* $(x+1)$ *es:*

a) -145
b) -144
c) -140
d) -138
e) -136

28. *Hallar el valor de* $"m"$ *tal que Si la suma de coeficientes del cociente de la división* $\frac{x^{m-1}-(m+1)x+m}{(x-1)^2}$ *es igual a* 210, *entonces el valor de* $"m"$ *es:*

a) 5
b) 10
c) 20
d) 30
e) 40

29. *Al dividir un polinomio* $P(x)$ *separadamente por* $(x-1)$ *y* $(x-2)$ *se obtiene como restos* 6 *y* 18 *respectivamente. El resto que se obtiene al dividir el polinomio* $P(x)$ *entre el producto:* $(x-1)(x-2)$ *es:*

a) $3x-12$
b) $2x-12$
c) $6x-12$
d) $x-6$
e) $12x-6$

30. *Un polinomio mónico de tercer grado es divisible por* $(x-2)$ *y* $(x+1)$ *al dividirlo por* $(x-3)$ *da resto* 20. *El resto que se obtiene al dividir dicho polinomio entre* $(x+3)$ *es:*

a) -10
b) 30
c) -20
d) -30
e) 20

COCIENTES NOTABLES

DEFINICIÓN. *La división* $\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$, *donde* $n \in \mathbb{N}$, *es un cociente notable si y solamente sí, es una división exacta y su cociente respectivo se determina por simple inspección, es decir podemos obtener el cociente sin efectuar la división.*

Ejemplo:

- $\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$
- $\frac{x^4 - y^4}{x + y} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$

CASOS QUE SE PRESENTAN EN LOS COCIENTES NOTABLES:

I) PRIMER CASO

$\frac{x^n - y^n}{x - y}$, *donde* $n \in \mathbb{N}$

El desarrollo del cociente notable viene dado por:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^4 - y^4}{x - y} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$$

II) SEGUNDO CASO

$\frac{x^n + y^n}{x + y}$, *donde* $n \in \mathbb{N}$ *y "n" es impar*

Tenemos su desarrollo:

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + xy^{n-2} - y^{n-1}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2$$

III) TERCER CASO

$\frac{x^n - y^n}{x + y}$, *donde* $n \in \mathbb{N}$ *y "n" es par.*

El desarrollo que se obtiene es:

$$\frac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + xy^{n-2} - y^{n-1}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^4 - y^4}{x + y} = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$$

IV) CUARTO CASO

$\frac{x^n + y^n}{x - y}$ *no es cociente notable, para* $n \in \mathbb{N}$

NÚMERO DE TÉRMINOS DE UN COCIENTE NOTABLE:

Sea el cociente notable $\dfrac{x^m \pm y^n}{x^p \pm y^q}$*, luego tenemos que el número de términos viene dado por:*

$$\text{Nro. de términos} = \frac{m}{p} = \frac{n}{q}$$

TÉRMINO GENERAL DE UN COCIENTE NOTABLE:

Dado cociente notable $\dfrac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$*, el termino de lugar" k" vine dado por:*

$$T_k = (signo)x^{n-k}.y^{k-1}$$

Donde:

- $"n"$ *es el número de términos.*
- $"k"$ *lugar del término.*

El signo se determina según el caso que se tenga:

divisor	Signo de T_k	
	$"k"$ *es par*	$"k"$ *es impar*
$x+y$	$-$	$+$
$x-y$	$+$	$+$

EJERCICIOS

1. *En el siguiente cociente notable* $\dfrac{(x+2)^{16}-(x-2)^{16}}{2(x^2+4)}$*. El valor numérico del quinto término para* $x=1$ *es:*

a) -729
b) 126
c) 81
d) 243
e) 729

2. *Si el cociente* $\dfrac{x^{6n+1}-y^{5n}}{x^{2n-3}-y^n}$ *es exacto, entonces el valor de* $"n"$ *, donde* $n \in \mathbb{N}$*, es:*

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

3. *Si el cociente de* $\dfrac{x^p - y^{432}}{x^3 - y^p}$ *es exacto, indicar el total de sus términos.*

a) 6
b) 12
c) 18
d) 24
e) 30

4. *Dada la división algebraica* $\dfrac{x^{19}-y^{19}}{x-y}$ *; indique cuál de las siguientes expresiones no es un término del desarrollo del cociente notable dado:*

a) $x^{12}y^{6}$
b) $x^{10}y^{8}$
c) $x^{9}y^{9}$
d) $x^{14}y^{3}$
e) $x^{7}y^{11}$

5. *Si el quinto término del desarrollo del siguiente cociente notable:* $\dfrac{x^{14}-y^{35}}{x^{2}-y^{5}}$ *es* $x^{9-a}y^{12+b}$. *El valor de* "$a+b$" *es:*

a) 5
b) 6
c) 7
d) 13
e) 11

6. *El coeficiente del cuarto término del desarrollo de* $\dfrac{32x^{5}+243y^{5}}{2x+3y}$ *es:*

a) -108
b) -27
c) -54
d) -81
e) -12

7. *Sabiendo que* $x^{a}y^{24}$ *es el término central del desarrollo del cociente exacto:* $\dfrac{x^{75}-y^{b}}{x^{c}-y^{2}}$. *El valor de* $E=a+b+c$ *está dado por:*

a) 39
b) 49
c) 59
d) 69
e) 89

8. *Si* $\dfrac{x^{n}-1}{x^{2}-1}$ *es un cociente notable de* 4 *términos. La suma de los términos 3ro y 4to es:*

a) $x^{4}+1$
b) $x^{4}+x^{2}$
c) $x^{2}+1$
d) $x^{2}+x$
e) $x+1$

9. *El coeficiente del tercer término del desarrollo del cociente* $\dfrac{x^{12}-16}{2x^{3}+4}$ *es:*

a) 2
b) $\dfrac{1}{2}$
c) 8
d) 6
e) 1

10. *El grado absoluto del primer término central del cociente notable* $\dfrac{x^{15n+50}-y^{15n-10}}{x^{n+1}-y^{n-2}}$ *es:*

a) 11
b) 106
c) 63
d) 40
e) 72

11. *Si* $\ldots x^{195}y^{140}+x^{190}y^{147}\ldots$ *son términos consecutivos del desarrollo de un cociente notable. El número de términos que posee es:*

a) 61
b) 100
c) 63
d) 72
e) 60

12. *El número de términos que tiene el siguiente cociente notable* $\dfrac{(x-a)^{n}-(2ax)^{2n-21}}{x^{2}+a^{2}}$ *es:*

a) 3
b) 7
c) 11
d) 17
e) 22

13. *Dado el siguiente cociente notable* $\frac{x^{20}-y^{30}}{x^2-y^3}$*. El lugar que ocupa el término que contiene a* x^{10} *es:*

a) Sexto.
b) Quinto.
c) Octavo.
d) Cuarto.
e) Décimo.

14. *Si el* T_{25} *del desarrollo de:* $\frac{x^{129m}-a^{86n}}{x^{3m}-a^{2n}}$ *viene dado por* $x^{270}a^{288}$*, entonces el valor de* $(m+n)$ *es:*

a) 11
b) 13
c) 21
d) 15
e) 31

15. *En el desarrollo del cociente notable:* $\frac{x^{148m}-y^{296p}}{x^{2m}-y^{4p}}$*. El termino de lugar* 60 *es* $x^{56}y^{708}$*, entonces el grado del término de lugar* 21 *es:*

a) 234
b) 432
c) 214
d) 532
e) 452

16. *Dado el cociente notable* $\frac{x^{\alpha}-y^{\beta}}{x^3-y^4}$*. Si:* $\frac{T_6.T_9}{T_7}=x^{12}y^{28}$*, entonces el valor de* "$\alpha+\beta$" *es:*

a) 20
b) 84
c) 48
d) 36
e) 42

17. *El cociente de la división:* $\frac{x^{95}+x^{90}+x^{85}+x^{80}+\ldots+x^5+1}{x^{80}+x^{60}+x^{40}+x^{20}+1}$ *es:*

a) $q(x)=x^{15}-x^{10}+x^5-1$
b) $q(x)=x^{15}+1$
c) $q(x)=x^{15}+x^{10}+x^5+1$
d) $q(x)=x^{15}-x^5+1$
e) $q(x)=x^{15}-1$

18. *Si en el desarrollo del cociente notable* $\frac{x^{n+3m}-y^{7m}}{x^2-y^4}$ *hay* 14 *términos, entonces el grado absoluto del término que ocupa el lugar* $(m-n)$*, es:*

a) 8
b) 16
c) 32
d) 64
e) 72

19. *Dado el siguiente cociente notable* $\frac{x^{3n+2}-y^{5n-1}}{x^2-y^{n-5}}$*, entonces el grado absoluto del décimo primer término en el cociente notable, es:*

a) 25
b) 32
c) 30
d) 28
e) 34

20. *La expresión* $\frac{x^8(x^2y^2)+y^{-8}}{x^2y^2+1}$ *genera un cociente notable. Si* $T_k=x^ny^{-n}$ *es un término de esta división, entonces el término* T_k *es:*

a) $T_k=x^8y^{-8}$
b) $T_k=x^4y^{-4}$
c) $T_k=x^{10}y^{-10}$
d) $T_k=x^5y^{-5}$
e) $T_k=x^2y^{-2}$

21. *Si al dividir* $\dfrac{x^{25n} - y^{25n}}{x^{3^n-1} + y^{3^n-1}}$ *se obtiene como segundo término* $-x^{16}y^{8}$. *El número de términos que tiene el cociente es:*

a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

22. *Si el desarrollo del siguiente cociente notable* $\dfrac{(x+1)^{11} + (x-1)^{11}}{x}$ *tiene un término de la forma* $a(x^2-1)^b$, *entonces el valor de* $T = a + b$ *es:*

a) 3
b) 8
c) 5
d) 7
e) 11

23. *El número de términos que tendrá el cociente notable* $\dfrac{x^{5m+10} - y^{5m-50}}{x^{2n+9} - y^{2n+5}}$; $\{m;n\} \in \mathbb{N}$ *es:*

a) 12
b) 13
c) 14
d) 15
e) 16

24. *Sabiendo que al dividir:* $\dfrac{x^{2^n} - y^{2^n}}{x^{3^m-1} + y^{3^m-1}}$ *se obtiene un cociente cuyo segundo término es* $-x^{8}y^{8}$. *El número de términos del cociente notable es:*

a) 4
b) 3
c) 5
d) 6
e) 7



CAMPO NUMÉRICO

DEFINICIÓN. *Un campo es un conjunto no vacío "K", que está dotado de dos operaciones binarias, que se denominan suma y multiplicación y que son representadas por los símbolos "+" y "·" respectivamente y se cumplen las siguientes propiedades:*

PARA LA ADICIÓN:

1. ***Propiedad de la clausura***
   $\forall a,b\in K, a+b\in K$

2. ***Propiedad asociativa***
   $\forall a,b,c\in K, a+(b+c)=(a+b)+c$

3. ***Propiedad conmutatividad***
   $\forall a,b\in K, a+b=b+a$

4. ***Propiedad de la existencia del elemento neutro aditivo***
   $\exists!0\in K / \forall a\in K, a+0=a$

5. ***Propiedad Existencia del elemento inverso aditivo***
   $\forall a\in K;\exists!-a\in K / a+(-a)=0$

PARA LA MULTIPLICACIÓN:

6. ***Propiedad de la clausura***
   $\forall a,b\in K, a\cdot b\in K$

7. ***Propiedad asociativa***
   $\forall a,b,c\in K, a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

8. ***Propiedad conmutatividad***
   $\forall a,b\in K, a\cdot b=b\cdot a$

9. ***Existencia del elemento neutro multiplicativo***
   $\exists!1\in K / \forall a\in K, a\cdot 1=a$

10. ***Existencia del elemento inverso multiplicativo***
    $\forall a\in K-\{0\};\exists!a^{-1}\in K / a\cdot a^{-1}=1$

11. ***Propiedad Distributiva***

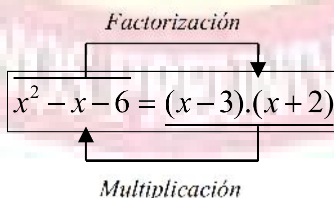
$$\forall a,b,c\in K,\begin{cases}a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\\(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c\end{cases}$$

Ejemplos:

El conjunto de los números racionales $(\mathbb{Q})$, reales $(\mathbb{R})$ y complejos $(\mathbb{C})$ constituyen ejemplos de campos.

DEFINICIÓN.

Factorización es el proceso de representar un polinomio como producto de dos o más polinomios (factores).



POLINOMIO SOBRE UN CAMPO

Un polinomio $P(x)$ *está definido sobre un campo, si cada uno de sus coeficientes pertenece al campo en cuestión.*

Ejemplos:

- $H(x)=2x^3-4x^2y^5+3$
  Está definido sobre los campos $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

- $G(x)=x^4-\sqrt{2}x^2y+5y^3$
  Está definido sobre los campos $\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{C}$.

- $F(x)=2ix^5-5x^3y^2+(2+2i)y^8+23$
  Está definido sobre el campo $\mathbb{C}$.

FACTOR O DIVISOR DE UN POLINOMIO

Un polinomio $g(x)$ *de grado no nulo es factor de otro Polinomio* $P(x)$ *si y solamente si* $P(x)$ *es divisible por* $g(x)$.

Ejemplos:

- $h(x)=x-y$ *es un factor de* $P(x)=x^4-y^4$, *pues la división* $\dfrac{x^4-y^4}{x-y}$ *es exacta.*

POLINOMIO IRREDUCTIBLE SOBRE UN CAMPO

Un polinomio $P(x)$ *se dice irreductible sobre un campo, cuando* $P(x)$ *no puede ser expresado como producto de polinomios de grados no nulos sobre el mismo campo.*

Ejemplos:

- $H(x)=x^4-2y^4$
  Es irreductible sobre el campo $\mathbb{Q}$, *pero no en* $\mathbb{R}$.

- $G(x)=x^4+y^4$
  Es irreductible sobre el campo $\mathbb{R}$, *pero no sobre el campo* $\mathbb{C}$.

FACTOR PRIMO DE UN POLINOMIO

Un factor primo de un Polinomio $P(x)$, *es un factor irreductible del polinomio sobre un determinado campo.*

Ejemplo:

- $H(x)=x^4-y^4=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

Tenemos que $(x-y)$; $(x+y)$; (x^2+y^2) *son factores primos de* $H(x)$ *en* $\mathbb{Q}$.

TEOREMA

Dado un polinomio $P(x)$ *dado por:*

$$P(x) = P_1^{\alpha_1}(x).P_2^{\alpha_2}(x).P_3^{\alpha_3}(x)...P_{m-1}^{\alpha_{m-1}}(x).P_m^{\alpha_m}(x).$$

Donde $P_j^{\alpha_j}(x)$ *son polinomios irreductibles sobre un determinado campo, entonces:*

1. *El número de factores primos es "m".*
2. *El número de factores Algebraicos esta dado por:* $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)...(\alpha_m+1)$

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

A) MÉTODO DEL FACTOR COMÚN

En este método buscamos factores comunes que en algunos casos pueden ser monomios y en otros polinomios. Para realizar la factorización extraemos el factor común de entre todos los términos.

Ejemplos:

- $P(x;y) = ab^2x^4y^5 - abx^3y^7$
  $P(x;y) = abx^3y^5(bx - y^2)$
- $Q(x;a;b;c) = a(x-1) - b(x-1) + c(x-1)$
  $Q(x;a;b;c) = (x-1)(a-b+c)$

B) MÉTODO DE AGRUPACIÓN DE TERMINOS

Este método consiste en agrupar los términos del polinomio en cuestión de modo que en cada grupo de términos encontremos factores en común.

Ejemplos:

- $R(x;y;z;a;b) = ax + by + ay + bz + az + bx$
  $R(x;y;z;a;b) = (ax + ay + az) + (bx + by + bz)$
  $R(x;y;z;a;b) = a(x+y+z) + b(x+y+z)$
  $R(x;y;z;a;b) = (a+b)(x+y+z)$

C) MÉTODO DE LAS IDENTIDADES

Para este método usaremos las identidades de productos notables.

Binomio al cuadrado
- $\underbrace{a^{2n} \pm 2a^nb^m + b^{2m}}_{T.C.P} = (a^n \pm b^m)^2$

Diferencia de cuadrados
- $a^{2n} - b^{2m} = (a^n - b^m)(a^n + b^m)$

Binomio al cubo
- $a^{3n} \pm b^{3m} \pm 3a^nb^m(a^n \pm b^m) = (a^n \pm b^m)^3$

Suma y diferencia de cubos
- $a^{3n} \pm b^{3m} = (a^n \pm b^m)(a^{2n} \mp a^nb^m + b^{2m})$

Ejemplos:

- $M(x;y) = x^6 - y^6$
  $M(x;y) = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$
  $M(x;y) = (x-y)(x^2 + xy + y^2)(x+y)(x^2 - xy + y^2)$

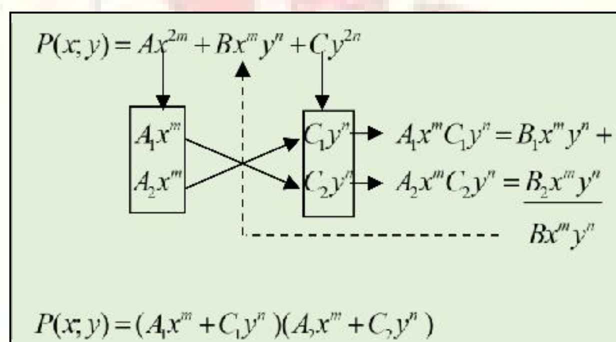
D) MÉTODO DEL ASPA SIMPLE

Se usa para factorizar polinomios de la forma:

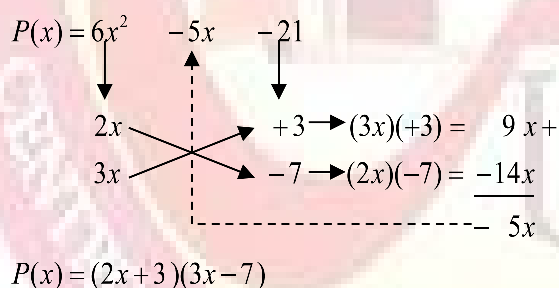
$$P(x;y) = Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n}$$

El procedimiento es el siguiente:

1) *Ordenar el trinomio en la forma dada líneas arriba.*
2) *Se descompone los términos extremos como el producto de dos factores.*
3) *Se multiplica en aspa los factores de los términos extremos y luego sumamos estos productos.*
4) *Se verifica que el resultado sea el término central.*
5) *Al verificarse el paso 4, entonces tomamos los factores en forma horizontal.*



Ejemplo: *Factorizar:* $P(x) = 6x^2 - 5x - 21$



$P(x) = (2x+3)(3x-7)$

E) MÉTODO DEL ASPA DOBLE

Se usa este método para factorizar polinomios de la forma:

$$P(x;y) = Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n} + Dx^m + Ey^n + F$$

El procedimiento es el siguiente:

1) *Ordenamos el polinomio en la forma dada líneas arriba.*

2) *Se Realiza dos aspas simples entre los términos* Ax^{2m}; $Bx^m y^n$; Cy^{2n} *y* Cy^{2n}; Ey^n; F *, además también se realiza un aspa simple entre los términos* Ax^{2m}; Dx^m; F *.*

3) *De verificarse cada aspa simple realizada, tomaremos los factores en forma horizontal.*

$$P(x;y) = Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n} + Dx^m + Ey^n + F$$

$A_1x^m \quad C_1y^n \quad F_1$

$A_2x^m \quad C_2y^n \quad F_2$

$$P(x;y) = (A_1x^m + C_1y^n + F_1)(A_2x^m + C_2y^n + F_2)$$

Ejemplo:

Factorizar $S(x;y) = 4x^2 + 8xy + 3y^2 - 2x + y - 2$

Apliquemos el procedimiento mencionado.

$$S(x;y) = 4x^2 + 8xy + 3y^2 - 2x + y - 2$$

$2x \quad 3y \quad -2$

$2x \quad y \quad +1$

Luego tenemos que:

$$S(x;y) = (2x + 3y - 2)(2x + y + 1)$$

F) *MÉTODO DEL ASPA DOBLE ESPECIAL*

Se usa este método para factorizar polinomios de la forma:

$$P(x) = Ax^{4m} + Bx^{3m} + Cx^{2m} + Dx^m + E$$

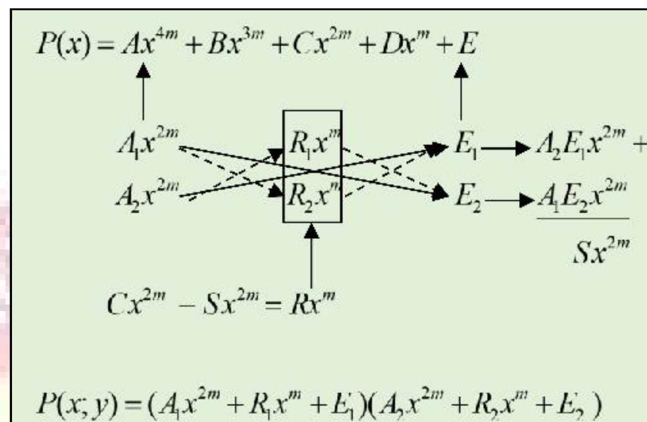
El procedimiento es el siguiente:

1) *Se Ordena el polinomio en la forma dada líneas arriba.*

2) *Se Realiza un aspa simple entre los términos extremos* Ax^{4m} *y* E *de modo que la suma de los productos en aspa se aproxime al termino central.*

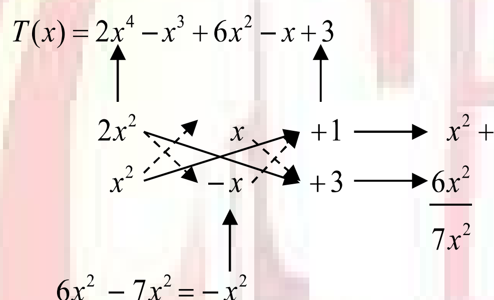
3) *La última suma se resta del término central* Cx^{2m} *y esta diferencia se expresa como dos factores de modo que se busque dos aspas simples entre los dos lados.*

4) *Se toma los factores en forma horizontal.*



Ejemplo:

Factorizar: $T(x)=2x^4-3x^3+6x^2-x+3$
Usando el método expuesto.



Luego tenemos que:

$T(x)=(2x^2+x+1)(x^2-x+3)$

G) *MÉTODO DE LOS DIVISORES BINOMICOS*

Este método se usa para factorizar polinomios en una variable y que poseen un factor lineal, supongamos: $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\ ;\ a_n\neq 0\wedge a_0\neq 0$
El método de los divisores binómicos se sustenta en el siguiente teorema.

TEOREMA
Dado un polinomio $P(x)$ *en una variable.*
$x=b$ *es un cero del polinomio* $\Leftrightarrow$ $(x-b)$ *es un factor de* $P(x)$

El procedimiento es el siguiente:

1) *Encontremos los posibles ceros del polinomio* $P(x)$*, esto es:*

$$\text{posibles raíces}=\pm\left\{\frac{\text{Cualquier divisor del término independiente}}{\text{Cualquier divisor del coeficiente principal}}\right\}$$

2) *Se reemplaza cada valor en el polinomio hasta obtener como valor numérico cero y así obtenemos un cero del polinomio* $P(x)$.

3) *Luego usando el teorema anterior obtenemos el primer factor del polinomio.*

4) *Aplicando la división por Ruffini entre el polinomio* $P(x)$ *y el primer factor encontrado, donde el cociente de la división es el otro factor buscado.*

Ejemplo:

Factorizar:

$R(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

Los posibles ceros de $R(x)$*, esto es:*

$$P.C(R(x)) = \left\{ \pm \frac{div.(|6|)}{div.(|1|)} \right\} = \left\{ \pm \frac{div.(6)}{div.(1)} \right\}$$
$$= \{\pm 1; \pm 2; \pm 3\}$$

Para $x = 1$

$R(1) = (1)^4 - (1)^3 - 7(1)^2 + (1) + 6 = 0$

Luego se tiene que $(x-1)$ *es un factor de* $R(x)$

Entonces:

	1	-1	-7	1	6
$x = 1$		1	0	-7	-6
	1	0	-7	-6	0
$x = -2$		-2	4	6	
	1	-2	-3	0	
$x = 3$		3	3		
	1	1	0		

cociente (bajo $1 \quad 1$)

Luego: $(x-1); (x+2); (x-3)$ *son factores de* $R(x)$

En consecuencia:

$R(x) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+1)$

EJERCICIOS

1. *Uno de los factores de:* $8(m+1)^3 - 125$ *es:*

a) $5m^2+6$
b) $3m-2$
c) $5m+2$
d) $4m^2+18m+39$
e) $4m-25$

2. *La expresión equivalente a:* $b^2+c^2-a^2-d^2+2ad+2bc$*, es:*

a) $(b-c-a+d)(b+c-a-d)$
b) $(b+c-a-d)(b-c+a+d)$
c) $(b+c+a+d)(b-c+a-d)$
d) $(b-c+a+d)(b-c-a-d)$
e) $(b+c+a-d)(b+c-a+d)$

3. *Luego de factorizar:*
$H(a;b;c) = a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
Uno de sus factores compuestos, es:

a) $a^2-(b+c)a+bc$
b) $a^2+(b+c)a+ac$
c) b^2+abc
d) a^2-ab+b^2
e) $a^2+ab-ac$

4. *Luego de factorizar el polinomio:* $P(x;y) = (x+y)^2 - 18(x+y) + 65$*, uno de sus factores primos, es:*

a) $x+y+13$
b) $x+y+5$
c) $x-y-13$
d) $x-y-5$
e) $x+y-13$

5. *La suma de factores primos de* $36x^5+36x^4-25x^3-25x^2+4x+4$*, es:*

a) $11x+1$
b) $11x+3$
c) $11x+5$
d) $11x+4$
e) $11x+2$

6. *El factor primo de menor suma de coeficientes del polinomio* $P(x;y) = x^3+2y^3-xy^2-2x^2y$*, es:*

a) $x-y$
b) $x-3y$
c) $x-2y$
d) $x-2y-1$
e) $x+y$

7. *Luego de factorizar:*
$Q(x) = x^6+4x^4+x^3+4x^2+2x$
Un factor primo binómico del polinomio, es:

a) x
b) x^2+2
c) $x+1$
d) x^2+1
e) x^3+2x+1

8. *Luego de factorizar el polinomio:*
$(a-b)^2(c-d)^2+2ab(c-d)^2+2cd(a^2+b^2)$
La suma de sus factores primos es:

a) $a^2+b^2+c^2+d^2$
b) $a+2b+c+2d$
c) $a^2-b^2+c^2-d^2$
d) $a+b^2+c+d$
e) $2a+b+2c+d$

9. *Luego de factorizar:*
$(x+1)(x+3)(x+4)(x+6)+8$
La suma de sus factores primos es:

a) $2x+7$
b) $7x+2$
c) $10x+2$
d) $5x+5$
e) $5x-7$

10. *Los siguientes polinomios comparten un factor primo.*
$A(x) = 192x^2-96x-96$
$B(x) = 48x^2+168x+72$
La suma de coeficientes de dicho factor es:

a) 96
b) 103
c) 3
d) 7
e) 13

11. *Al factorizar:*
$P(x)=(2x+7c+d)(x+3c)+cd-c^2$
La suma de coeficientes de uno de sus factores primos es:

a) $4c-1$
b) $4c+1$
c) $d+3c+2$
d) $2c+2$
e) $2-d+5c$

12. *La suma de los factores primos de:*
$Z(x)=x^3-13x-12$ *, es:*

a) $3x-1$
b) $4x+7$
c) $3x-5$
d) $7x+4$
e) $3x$

13. *El factor primo de mayor grado de:*
$P(x)=2x^4+5x^3-x^2-5x+2$ *es:*

a) $2x^2+1$
b) x^2-1
c) x^2+x-1
d) x^2+x+1
e) x^3+4

14. *Luego de factorizar:* $S(x)=12x^3+8x^2-3x-2$
Uno de sus factores primos es:

a) $2x-1$
b) $x+1$
c) $3x+1$
d) $3x-1$
e) $x-2$

15. *El número de factores que presenta el polinomio*
$H(x)=x^5-6x^4+9x^3+8x^2-48x+72$ *, es:*

a) 3
b) 12
c) 4
d) 6
e) 13

16. *Luego de factorizar:*
$V(x;y)=(x+y)^9(x-y)^5-(x^2-y^2)^7$
El factor primo que más veces se repite es:

a) $x+y$
b) $x-y$
c) x^2+y^2
d) x
e) xy

17. *Factorizar el polinomio:*
$P(x)=x^5+x^4+2x^3-1$
La suma de coeficientes del factor de grado 3 es:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

18. *El número de factores primos que tiene el polinomio:*
$F(a;b;c)=(a+b+c)(ab+ac+bc)-abc$ *, es:*

a) 6
b) 4
c) 3
d) 5
e) 1

19. *Luego de factorizar:*
$F(x;y;z)=x^5+2x^2y+z^2x^2+3yx^3+6y^2+3z^2y-$
$-5z(x^3+2y+z^2)$
Un factor primo es:

a) x^3+2y+z
b) x^3-2y+z^2
c) $x^2+3y-5z$
d) x^2+3y-5
e) $x+y+z$

20. *Luego de factorizar el polinomio*
$K(x;y)=6x^2+15xy+9y^2+10x+12y+4$
La suma de los términos independientes de sus factores primos es:

a) 4
b) 6
c) 12
d) 2
e) 9

21. *Al factorizar:* $M(x;y)=5x^2-y^2+10x-2y+4xy$
uno de sus factores primos, es:

a) $7x+y$
b) $x+y+3$
c) $x-y$
d) $5x-y$
e) $x+5y$

22. *Sea el polinomio*
$S(x)=18x^4+15x^3+36x^2+16x+5$
Luego de factorizar el polinomio se obtiene un factor de la forma ax^2+bx+c; $a>c$. *El valor de* $a+b+c$, *es:*

a) 5
b) 8
c) 10
d) 11
e) 9

23. *Luego de factorizar:*
$N(x)=x^5+5x^4+7x^3-x^2-8x-4$
El promedio aritmético de todos los términos independientes de los factores primos es:

a) $4/3$
b) $6/5$
c) $1/4$
d) $3/2$
e) $2/3$

24. *Luego de factorizar:*
$Z(x;y)=3(x-2y-5)^2-2(x-2y)+5$
El cociente de los términos independientes de los factores primos que se obtienen es:

a) 20
b) 5
c) 4
d) 8
e) 10

25. *Dado el polinomio:*
$M(x)=135x^3+3x^2-11x+1$
El mayor coeficiente principal de uno de sus factores irreductibles en $\mathbb{Q}$ *es:*

a) 10
b) 27
c) 5
d) 3
e) 9

26. *Luego de factorizar:*
$Z(x;y)=(x+y)^3+3xy(1-x-y)-1$
El factor primo que es un trinomio es:

a) $x+2y-1$
b) $x+2y-3$
c) $x-y-1$
d) $x+y+1$
e) $x+y-1$

27. *El producto de los coeficientes del factor primo de mayor término independiente del polinomio.*
$Q(x)=8x^3+28x^2-2x-7$, *es:*

a) 4
b) 5
c) 8
d) 12
e) 14

28. *Luego de factorizar:*
$H(a;b;c)=(a+b+c)(ab+ac+bc)-abc$
Un factor primo es:

a) $a-b$
b) $b-c$
c) $a+b$
d) $a-c$
e) $2a-b$

29. *Después de factorizar*
$M(x;y)=(5x+4y)^3+(10x+8y)^2+15x+12y$
El mayor termino independiente de sus factores primos es:

a) 3
b) 7
c) 1
d) 5
e) 10

30. *Luego de factorizar:* $28xy-23y+35x+40-44y^2$
La suma de coeficientes de uno de sus factores primos es:

a) 9
b) 12
c) 15
d) 24
e) 7

31. *Si* $S(x)$ *representa la suma de factores primos del polinomio:* $R(x)=x^4+x^2+1$. *El valor* $S(2)$ *es.*

a) 4
b) 5
c) 8
d) 10
e) 12

32. Luego de factorizar: $x^4 + 2x^3 - x - 6$
La suma de términos independientes de sus factores primos es:

a) 1
b) 4
c) -2
d) 5
e) -1

33. Después de factorizar: $2(2x-a)^3 - 27a^2x$
Un factor primo es:

a) $4x+a$
b) $4x-a$
c) $x+a$
d) $x+2a$
e) $x+a$

34. Al factorizar $P(x) = x^8 - 6x^4 - 7x^2 - 6$ en $\mathbb{R}$, la suma entre el número de factores primos cuadráticos y el número de factores lineales es:

a) 4
b) 3
c) 5
d) 10
e) 6

35. El mayor termino independiente de entre todos los factores primos del trinomio
$Q(x;y) = (x+y+3)^2 + 7x + 7y + 31$, es:

a) 4
b) 8
c) -1
d) 3
e) 6

36. El número de factores primos que tiene el siguiente polinomio $P(x;a) = x(ax-1)(ax-a-1)(x+1) + a$, es:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 5
e) 3

37. Factorizar en $\mathbb{Q}$ el siguiente polinomio
$R(x) = x^6 + 4x^5 - 21x^4 - 20x^2 - 4$
La suma de coeficientes de uno sus factores primos, es:

a) 1
b) 5
c) 8
d) 10
e) 16

38. Sea $T(x) = x^2 + nx + n$ un factor primo de $V(x) = 5x^4 - 11x^2 - 4x + 1$. Un factor primo de $T(x) + n$, es:

a) $x-2$
b) $x-1$
c) $-2x-2$
d) $x-4$
e) x

39. Luego de factorizar $J(x) = x^6 - 4x^3 - 4x^2 + 4$ en $\mathbb{Z}$, la suma de coeficientes de uno de sus factores primos es:

a) 4
b) 3
c) -2
d) -3
e) 6

40. Si: $A(x) = ax^n + (a+1)x^{n-1} + c$
Es un factor primo de:
$H(x) = 10x^6 + 17x^5 + 3x^4 - 13x^2 - 10$ en $\mathbb{Z}$, El valor de $a - c + n^2$ es:

a) 6
b) 9
c) 12
d) 15
e) 16

41. Al factorizar
$K(x) = x^7 + 2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1$
La suma de los términos independientes de los factores primos es:

a) 2
b) 3
c) 0
d) -2
e) 4

42. *Después de factorizar* $B(x)=(2x+1)^7+4x(x+1)+2$
Uno de sus factores primos es:

a) $4x^2+6x+3$
b) $4x^2+5x-1$
c) $4x^2-7$
d) $4x^2-7x+1$
e) $2x^2+3x+1$

43. *El número de divisores algebraicos que tiene*
$T(a;b;c)=(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$, *es:*

a) 4
b) 3
c) 5
d) 7
e) 6

44. *Un factor primo racional de:*
$P(x)=x^4+4abx^2-(a^2-b^2)^2$ *es:*

a) $x^2+(a-b)^2$
b) x^2+a+b
c) $x-a+b$
d) $x+a+b$
e) $x-a-b$

45. *Un factor de:*
$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2-x^5$, *es:*

a) $x+1$
b) $x-1$
c) x^5-1
d) x^9+1
e) $(x^4+x^3+x^2+x+1)$

46. *El número de divisores algebraicos primos que admite el polinomio*
$H(x;y)=\left[x^4+y^4+(x+y)^4\right]^4$, *es:*

a) 1
b) 2
c) 4
d) 8
e) 9



6 RACIONALIZACIÓN

DEFINICIÓN. *La racionalización es el proceso que consiste en transformar el denominador (o numerador) irracional en otra expresión racional a través de un factor denominado factor racionalizador.*

Factor racionalizador (F.R):
Es una expresión irracional tal que, si se multiplica a otra expresión irracional, la transforma en una expresión racional.

CASOS DE RACIONALIZACIÓN

CASO I: Cuando el denominador irracional es un monomio de índice radical de cualquier orden.

*El **FR** es un radical que tenga el mismo índice, pero cuyos exponentes del radicando estarán expresados por la diferencia existente entre el índice origina de la raíz y los exponentes que afectan a sus variables esto es:*

$$\frac{N}{\sqrt[m]{a^n}} \Rightarrow FR = \sqrt[m]{a^{m-n}}\ ;\ m,n\in\mathbb{R}\wedge m>n$$

Ejemplo 1:

Racionalizar

$$\frac{A}{\sqrt[7]{x^4y^2}} = \frac{A}{\sqrt[7]{x^4y^2}}\cdot\frac{\sqrt[7]{x^3y^5}}{\sqrt[7]{x^3y^5}} = \frac{A\sqrt[7]{x^3y^5}}{xy}$$

donde: $FR=\sqrt[7]{x^3y^5}$

Ejemplo 2:

Racionalizar

$$\frac{B}{\sqrt[8]{x^5}\sqrt[9]{x^7y^2}} = \frac{B.FR_1.FR_2}{x^2y}$$

donde: $FR_1=\sqrt[8]{x^3}$ *y* $FR_2=\sqrt[9]{x^2y^7}$

Ejemplo 3:

Racionalizar

$$\frac{C}{\sqrt[3]{x^8y^6z^3}} = \frac{C}{xy\sqrt[5]{x^3yz^3}} = \frac{C.FR}{x^2y^2z}$$

donde: $FR=\sqrt[5]{x^2y^4z^2}$

CASO II: Cuando el denominador irracional es un binomio (o transformable a binomio) cuyos radicales son de segundo orden (o índice par)

*El **FR** es la conjugada del denominador que se empleará tantas veces hasta que el denominador quede transformado en una expresión racional.*

$$\frac{N}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \Rightarrow FR=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$\frac{N}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \Rightarrow FR=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Ejemplo 1:

Racionalizar

$$\frac{A}{\sqrt{x}+5} = \frac{A}{\sqrt{x}+5}\,\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-5} = \frac{A.FR}{x\ -\ 25}$$

donde: $FR = \sqrt{x}-5$

Ejemplo 2:

Racionalizar

$$\frac{B}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}} = \frac{B}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}\cdot\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}} =$$

$$= \frac{B\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[2]{x}-\sqrt[2]{y}}\cdot\frac{\sqrt[2]{x}+\sqrt[2]{y}}{\sqrt[2]{x}+\sqrt[2]{y}} = \frac{B.FR_1.FR_2}{x-y}$$

donde: $FR_1 = \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}, FR_2 = \sqrt[2]{x}+\sqrt[2]{y}$

CASO III: Cuando el denominador irracional es un radical de tercer orden de las formas:

$$\frac{N}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}} \Rightarrow FR = \sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$$

$$\frac{N}{\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{b^2}} \Rightarrow FR = \sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{b}$$

Para este caso se debe tener en cuenta las siguientes equivalencias algebraicas:

$$a+b = (\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$$
$$a-b = (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$$

Ejemplo 1:

Racionalizar

$$\frac{A}{\sqrt[3]{6}+1} = \frac{A.FR}{7}$$

donde: $FR = \sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{(6)(1)}+\sqrt[3]{1^2}$

Ejemplo 2:

Racionalizar

$$\frac{B}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{3}} = \frac{B.FR}{28}$$

Donde: $FR = \sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}$

EJERCICIOS

1. *Luego de racionalizar el denominador de:*

$$\frac{10}{\sqrt{5\sqrt[5]{3^3}}}$$

El valor de este es:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

2. *Luego de reducir la expresión:*

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{72}+\sqrt{50}-\sqrt{8}}$, *se obtiene:*

a) $1/8$
b) $1/7$
c) $1/10$
d) $1/9$
e) $1/5$

3. *Luego de efectuar la operación:*

$K=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, *se obtiene:*

a) $2\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3}$
d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
e) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

4. *Después de efectuar:* $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}\div\dfrac{7+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, *se obtiene:*

a) $2+\sqrt{3}$
b) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$
c) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$
d) $2-\sqrt{3}$
e) $\sqrt{3}-1$

5. *Luego de racionalizar* $\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$, *se obtiene:*

a) $\sqrt{x^2-1}+1$
b) $\sqrt{x^2+1}-x$
c) $\sqrt{x^2-1}+x$
d) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$
e) $\sqrt{x^2-1}-x$

6. *Si se racionaliza el denominador de la expresión* $M=\dfrac{x-5}{\sqrt{x-4}-\sqrt{3x-14}}$, *se obtiene una nueva expresión, cuyo valor para* $x=5$, *es:*

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

7. *El denominador después de racionalizar la siguiente expresión* $\dfrac{A}{2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$, *es:*

a) 1
b) 3
c) 4
d) 6
e) 2

8. *El denominador de la expresión racionalizada* $\dfrac{4\sqrt{x}-6}{2\sqrt{3x}}$, *es:*

a) $2x$
b) $3x$
c) $6x$
d) $12x$
e) x

9. *Luego de racionalizar* $\dfrac{a}{\sqrt[7]{x^3y^4z^2}}$, *el denominador de la expresión final es:*

a) xy
b) x^2y^2z
c) xyz
d) z

e) xy^2

10. *Luego de simplificar la expresión*

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$ *, se obtiene:*

a) 1
b) $\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3}$
d) $2+\sqrt{3}$
e) $\sqrt{3}+1$

11. *Si "N" es una expresión definida por:*

$$N=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}$$

Entonces al racionalizar y simplificar "N", el denominador resultante, es:

a) 48
b) 28
c) 20
d) 15
e) 12

12. *El denominador racionalizado de la siguiente expresión* $V=\frac{x-4}{x-5\sqrt{x}+6}$; $x>0$ *, es:*

a) $x+9$
b) $x-9$
c) $x+3$
d) $x-3$
e) x

13. *Si "T" es una expresión definida por:*

$$T=\frac{A}{2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$$

Entonces al racionalizar y simplificar "N", el denominador resultante, es:

a) 30
b) 25
c) 8
d) 6
e) 3

14. *El denominador racional de la expresión:*

$$H=\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$$ *, es:*

a) 2
b) 4
c) 6
d) 7
e) 5

15. *Después de racionalizar:*

$$\frac{15}{\sqrt{6}+3\sqrt{3}+2\sqrt{2}+6}$$

El denominador racionalizado es:

a) 3
b) 5
c) 7
d) 9
e) 11

16. *Luego de racionalizar el denominador:*

$$M=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$$ *, se obtiene:*

a) $\sqrt[3]{3}$
b) $\sqrt[3]{4}$
c) $\sqrt[3]{2}$
d) $\sqrt[3]{2}-1$
e) $\sqrt[3]{3}+1$

17. *Después de racionalizar* $\frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$ *, se obtiene:*

a) $\sqrt[3]{3}+1$
b) $\sqrt[3]{6}+2$
c) $\sqrt[3]{3}+3$
d) $2\sqrt[3]{3}+1$
e) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$

18. *Si "H" es una expresión definida por:*

$$H=\frac{1}{\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}-6}$$

Entonces al racionalizar y simplificar "H", el denominador resultante, es:

a) 36
b) 300
c) 216
d) 144
e) 243

19. *El denominador racional de la expresión*

$\dfrac{N}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{2}}$, *es:*

a) 3
b) 6
c) 9
d) 4
e) 7

20. *Luego de racionalizar* $\dfrac{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$, *se obtiene:*

a) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}-1$
b) $5+\sqrt{7}-\sqrt{3}-1$
c) $1+\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$
d) $\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}-1$
e) $\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-1$

21. *Luego de racionalizar:*

$$\frac{x^3+3x^2+2x+1}{x\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt[3]{x}+1}$$

El denominador que obtiene es:

a) x
b) $x+1$
c) $x-1$
d) 1
e) $2x$

22. *El denominador racionalizado de*

$\dfrac{4\sqrt{7}}{18+6\sqrt{7}+6\sqrt{2}+2\sqrt{14}}$, *es:*

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 7

23. *El denominador racionalizado de*

$F=\dfrac{1}{1+\sqrt[6]{16}-\sqrt[6]{2000}-\sqrt{5}}$ *es:*

a) 1
b) 20
c) 10
d) 5
e) 8

24. *En la expresión:*

$$H=\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}-\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}$$

El valor "H" para $a^4-a^2=6$, *es:*

a) $4\sqrt{6}$
b) $2\sqrt{3}$
c) $3\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{3}$
e) $2\sqrt{6}$

25. *Luego de simplificar la expresión*

$J=\dfrac{\sqrt[4]{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}}$, *se obtiene:*

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt[4]{5}$
c) $2\sqrt[4]{2}$
d) $\sqrt[4]{3}$
e) $\sqrt[4]{2}$

26. *Al racionalizar el denominador de*

$K=\dfrac{323}{21-2\sqrt[3]{121}+\sqrt[3]{11}}$

Se obtiene una expresión equivalente cuyo denominador es:

a) 15
b) 30
c) 10
d) 8
e) 9

27. *El denominador después de racionalizar la expresión* $K=\dfrac{4a-x}{2a\sqrt{x}-x\sqrt{a}}$, *es:*

a) ax
b) $ax+1$
c) $ax-1$
d) a^2x
e) 1

28. *El valor de:* $L=\dfrac{xy-4x}{\sqrt{xy}+\sqrt{3y}-2\sqrt{x}-2\sqrt{3}}$

Para $x=3,\ y=4$, *es:*

a) $\sqrt{3}$
b) $4\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{3}$
d) 1
e) $4\sqrt{2}$

29. *Luego de simplificar* $H=\dfrac{(x-1)(1+x-\sqrt[3]{x^2})}{1+\sqrt[3]{x}+x\sqrt[3]{x^2}}$ *, se obtiene:*

a) $\sqrt[3]{x}+1$
b) $\sqrt[3]{x^2}-1$
c) $\sqrt[3]{x}+x$
d) $\sqrt[3]{x}-1$
e) $2\sqrt[3]{x}-1$

30. *Al racionalizar la expresión:* $M=\dfrac{32}{\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}-3}$

El denominador entero simplificado que se obtiene es:

a) 1
b) 2
c) 4
d) 16
e) 32

31. *El denominador racionalizado de*

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}$$ *, es:*

a) $x+2$
b) $x+1$
c) $x-1$
d) $2x+1$
e) $2x-1$

32. *Siendo* $x>0$ *, el valor de* "x" *en:*

$\sqrt[x-1]{1+\sqrt{2}}\,.\,\sqrt[x+1]{\sqrt{2}-1}=\sqrt[16]{17+6\sqrt{8}}$ *, es:*

a) 4
b) 3
c) -2
d) -3
e) 6

33. *Después de racionalizar el denominador de* $\dfrac{1}{2+\sqrt[6]{7}-\sqrt[3]{7}}$ *, el valor de este, es:*

a) 568
b) 520
c) 456
d) 426
e) 342



ECUACIONES

DEFINICIÓN. *Una ecuación es una igualdad relativa, que se verifica solamente para ciertos valores asignados a sus variables.*

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

DEFINICIÓN. *Se llama conjunto solución de una ecuación, al valor o conjunto de valores asignados a sus variables o letras transforman a los miembros de la igualdad en cantidades que tienen el mismo valor.*

ECUACIONES EQUIVALENTES

DEFINICIÓN. *Son aquellas ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución.*

Ejemplo:

- ✓ $x+5=3$, *sólo se verifica para* $x=-2$
- ✓ $2x+5=1$, *sólo se verifica para* $x=-2$

Las ecuaciones: $x+5=3$ *y* $2x+5=1$, *Son equivalentes, puesto que para ambas:* $C.S=\{-2\}$

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES SEGÚN SU SOLUCIÓN

A. ECUACIÓN COMPATIBLE:
Es aquella ecuación que tiene al menos una solución y esta a su vez pueden ser:

a) Ecuación compatible determinada. *Es cuando la ecuación admite un número finito de soluciones.*

Ejemplo:
Consideremos la ecuación: $x^2-5x-24=0$

$$(x+3)(x-8)=0$$

$$x+3=0 \vee x-8=0$$

Entonces $x=-3 \vee x=8$

Por lo tanto, el conjunto solución es: $C.S=\{-3;8\}$

b) Ecuación compatible indeterminada. *Es cuando la ecuación admite un número infinito de soluciones.*

Ejemplo:

Dada la ecuación:
$$(x+2)^2+1=(x+3)^2-2x-4$$
Luego tenemos que:
$$x^2+4x+5=x^2+4x+5$$
$$0=0\ ;\forall x\in\mathbb{R}$$
Por lo tanto, el conjunto solución es: $C.S=\mathbb{R}$ *(Infinitas soluciones)*

B. *ECUACIÓN INCOMPATIBLE (INCONSISTENTE)*
Es aquella ecuación que no admite solución.

Ejemplo:

Dada la ecuación:

$$(x+2)^2-1=x^2+4x+12$$

$$x^2+4x+3=x^2+4x+12$$

$$3=12$$

Lo es que un absurdo.
Por lo tanto, la ecuación no admite solución alguna, luego se tiene que: $C.S=\varnothing$

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA VARIABLE REAL

DEFINICIÓN.
Son ecuaciones que luego de reducirse adoptan la forma:

$$ax+b=0 \quad ; \{a;b\}\subset\mathbb{R}$$

Solución de la ecuación lineal:

Considerando $A\neq 0$ *y realizando las operaciones y despejando el valor* $"x"$*, tenemos que:*

$$x=-\frac{b}{a}$$

DISCUSIÓN DE LA SOLUCIÓN

Dada la ecuación lineal: $ax+b=0 \quad ; \{a;b\}\subset\mathbb{R}$

1. *Si:* $a\neq 0 \wedge b\in\mathbb{R}\longleftrightarrow$ *Ecuación compatible determinada.* $n(C.S)<\infty$.
2. *Si:* $a=0\wedge b=0\longleftrightarrow$ *Ecuación compatible indeterminada.* $n(C.S)=\infty$
3. *Si:* $a=0\wedge b\neq 0\longleftrightarrow$ *Ecuación incompatible.* $n(C.S)=0$

Ejemplo:

- $2x+4=0\xrightarrow{solución}C.S=\{-2\}$
  $a=2\neq 0\wedge b=4$
  Es una ecuación compatible determinada.

- $0x+0=0\xrightarrow{solución}C.S=\mathbb{R}$
  $a=0\wedge b=0$
  Es una ecuación compatible indeterminada.

- $0x+2=0\xrightarrow{solución}C.S=\{\ \}$
  $a=0\wedge b=2\neq 0$
  Es una ecuación incompatible.

EJERCICIOS

1. El valor de "x" en:

$$\frac{2-x}{3}+\frac{3-x}{4}+\frac{3}{4}=\frac{x-4}{5}+\frac{x-5}{6}$$ es:

a) -4
b) 8
c) -8
d) 4
e) 12

2. Para $m \neq \pm 5$, el valor de la variable en:
$m^2(x-1)=5(5x-m)$, es:

a) $\frac{m+5}{m}$
b) $\frac{m}{m+5}$
c) m
d) $\frac{m-2}{m}$
e) $\frac{m+2}{m}$

3. La ecuación en "x"
$m^2x+1=m(x+1)$
Es incompatible. El valor de "m" es.

a) 0
b) 1
c) -1
d) 2
e) -2

4. Si la ecuación en "x":
$a(ax-x-1)=2x+1$
Es incompatible, el valor de "a", es:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

5. Al resolver la ecuación:

$$2x-\left(2x-\frac{3x-1}{8}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{x+2}{6}\right)-\frac{1}{4}$$

El valor de $19x$., es:

a) 5
b) 7
c) 9
d) 11
e) 13

6. El conjunto solución de la ecuación

$$\frac{2x+a}{b}-\frac{b-x}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab}$$, es:

a) $\{b\}$
b) $\{a\}$
c) $\{ab\}$
d) $\{2a\}$
e) $\{2b\}$

7. Al resolver la ecuación en "x"

$$\frac{x-1}{x+a-b}=\frac{1-x}{x-a+b}+2$$, se obtiene:

a) $(a+b)^2$
b) $(a-b)^2$
c) ab
d) a^2+b^2
e) a^2-b^2

8. Luego de resolver la ecuación:
$5[x+10-(2x+1)]=3(x-1)-4(2x+5)$, el valor de "$x$" es:

a) 1/2
b) 1/4
c) 1/6
d) 2
e) Absurda

9. Luego de resolver la ecuación:

$$\frac{x-a}{x-a-1}-\frac{x-a-1}{x-a-2}=\frac{x-b}{x-b-1}-\frac{x-b-1}{x-b-2},$$

el valor de "x" es:

a) $\frac{a+b}{2}$
b) $\frac{a+b}{3}$
c) $\frac{a+b+3}{2}$
d) $\frac{a+b-3}{2}$
e) $\frac{a+2b}{3}$

10. La suma de cifras del resultado que se obtiene al resolver la ecuación $\frac{x+1}{x+5}+\frac{2}{\sqrt{x+5}}=\frac{5}{4}$ es:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 10
e) 11

11. El valor de "x" en la ecuación:
$(x+1)+(x+2)+(x+3)+\ldots(x+n)=n^2$, es:

a) $n+1$
b) $\frac{n-1}{2}$
c) $n-1$
d) $\frac{n+1}{2}$
e) n

12. El valor de "x" en la ecuación:
$\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2}$, es:

a) -0,2
b) -0,5
c) -0,25
d) 0,25
e) 0,6

13. Si la ecuación: $\frac{a}{b}(x-a)=\frac{b}{a}(x-b)$ es incompatible, es correcto que:

a) $2a-b=0$
b) $a-b$
c) $a+b=0$
d) $a^2-3b=0$
e) $a+2b=0$

14. Si la ecuación es incompatible:
$8nx+2n-9=nx+2(x+n+7)$
El valor del parámetro "n" es:

a) 7/2
b) -7/2
c) 2/7
d) -2/7
e) 3/7

15. Si la ecuación:
$(3a-4)x^2+2ax+2=ax^2-2x+18$ se reduce a una de primer grado en "x", el valor de "x", es:

a) 5/2
b) 4/3
c) 8/3
d) 2/5
e) 3/4

16. Al resolver la ecuación en "x"
$\frac{1}{\sqrt{x+a}}-\frac{1}{\sqrt{x-a}}=\frac{1}{\sqrt{x-b}}-\frac{1}{\sqrt{x+b}}$ Se obtiene:

a) $a\sqrt{b}$
b) $b\sqrt{a}$
c) ab
d) $\sqrt{ab}$
e) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

17. Si la ecuación $mx+3=\frac{n}{2}(x+1)$ es compatible indeterminada. El valor de "$m.n$", es:

a) 12
b) 18
c) 72
d) 54
e) 45

18. El valor de "x" en:
$\frac{x+m}{m}-\frac{x+n}{n}=\frac{m^2+n^2}{mn}-2$, es:

a) $m+n$
b) m
c) $n-m$
d) n
e) $\frac{n-m}{2}$

19. *Al resolver la ecuación en "x"*

$$\frac{x^2-6x+10}{x^2+8x+17}=\left(\frac{x-3}{x+4}\right)^2$$ *, se obtiene:*

a) 1
b) 3
c) 2
d) -1/2
e) -1/3

20. *Luego de resolver la ecuación*

$$\frac{1}{ax+n+1}=\frac{1}{(ax+1)(ax+2)}+\frac{1}{(ax+2)(ax+3)}+\frac{1}{(ax+3)(ax+4)}+\ldots+\frac{1}{(ax+n)(ax+n+1)}$$

El valor de "x" es:

a) $\frac{n+1}{a}$
b) an
c) $\frac{n-1}{a}$
d) $n-1$
e) n^2

21. *Si la ecuación:*

$ax^3-3x^2+ax-2a=ab-bx-bx^2+2x^3$

Es de primer grado, el valor de "x" es:

a) 2
b) 3/2
c) 1/2
d) -1
e) 5/2

22. *Dada la ecuación indeterminada en "x"*

$$a(x+2)=\frac{1}{3}\left[b(2x+5)-c\right]$$

El valor numérico de $R=\frac{a^3-b^3+c^3}{abc}$ *es:*

a) $\left(\frac{5}{8}\right)^3$
b) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$
c) $\left(\frac{5}{2}\right)^2$
d) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$
e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

23. *Si la ecuación:*

$$\frac{nx+15}{5}-\frac{6n+5}{2n}=\frac{x-12}{2}+5$$

Presenta solución única en "x". El conjunto de valores que adopta "n" es:

a) $\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$
b) $\mathbb{R}-\left\{0;\frac{1}{3}\right\}$
c) $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right\}$
d) $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$
e) $\mathbb{R}-\left\{0;\frac{5}{2}\right\}$

24. *Resolver:*

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x-1\right]-1\right]-1\right]-1\right]-1=0$$

La suma de cifras de la solución es:

a) 11
b) 9
c) 12
d) 3
e) 8

25. *El valor de "x" en:*

$$\frac{121(5x^4+10x^2+1)}{61(x^4+10x^2+5)}=2x$$ *, es:*

a) 1
b) 2
c) 4
d) 8
e) 16

26. *La ecuación de primer grado en "x" es compatible determinada:*

$$(2n-1)x+2=nx-3n^2$$

Los valores reales del parámetro "n", son:

a) $\forall n \in \mathbb{R}$
b) 2
c) 3
d) $\forall n \in \mathbb{R}^+$
e) $\forall n \in \mathbb{R}-\{1\}$

27. *Luego de resolver:*

$$\frac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b$$

El valor numérico de "x" cuándo $4a-b=15$, es:

a) 5
b) 10
c) 8
d) 3
e) 1

28. *El valor de "x" en:*

$$\frac{\sqrt{x}+b}{\sqrt{x}-b}+\frac{\sqrt{x}-a}{\sqrt{x}+a}=\frac{\sqrt{x}-b}{\sqrt{x}+b}+\frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}-a};\ x\neq 0 \text{, es:}$$

a) $a+b$
b) $a-b$
c) ab
d) $-ab$
e) 1

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA VARIABLE REAL

Llamada también ecuaciones polinómicas de segundo grado. La forma general de una ecuación cuadrática con una variable real "x", es:

$$ax^2+bx+c=0 \;;\; a;b;c\in\mathbb{R}\wedge a\neq 0$$

La forma normal de la ecuación cuadrática es:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \;;\; a;b;c\in\mathbb{R}\wedge a\neq 0$$

ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Dada la ecuación $a\,x^2+b\,x+c=0 \;;\; \{a;b;c\}\subset\mathbb{R}$

1. *Si:* $a\neq 0\wedge b,c\in\mathbb{R}\longrightarrow$ ***Ecuación compatible determinada*****.** $n(C.S)<\infty$

2. *Si:* $a=0\wedge b=0\wedge c=0\longrightarrow$ ***Ecuación compatible indeterminada.*** $n(C.S)=\infty$

3. *Si:* $a=0\wedge b=0\wedge c\neq 0\longrightarrow$ ***Ecuación incompatible*****.** $n(C.S)=0$

Ejemplo:

- $x^2-x-6=0\xrightarrow{solución}C.S=\{-2;3\}$
  $a=1\neq 0\wedge b=-1\wedge c=-6$
  Es una ecuación compatible determinada*.*

- $0x^2+0x+0=0\xrightarrow{solución}C.S=\mathbb{R}$
  $a=0\wedge b=0\wedge c=0$
  Es una ecuación compatible indeterminada.

- $0x^2+0x+6=0\xrightarrow{solución}C.S=\{\;\}$
  $a=0\wedge b=0\wedge c=6\neq 0$
  Es una ecuación incompatible.

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA:

La ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0\,;a\neq 0$ *se puede resolver mediante una factorización o utilizando la fórmula de Bhaskara.*

I) MÉTODO DE FACTORIZACIÓN

Este método consiste en el uso del método del aspa simple para factorizar el polinomio de segundo grado que caracteriza a la ecuación, siempre y cuando el polinomio admita ser factorizable, además debemos tener en cuenta el siguiente teorema:

TEOREMA
Dados "m" y "n" números reales, luego tenemos que:

$$m\cdot n=0 \;\Rightarrow\; m=0\vee n=0$$

Ejemplo: *Resolver:*

$$6x^2 - x - 2 = 0$$

Solución:

Factoricemos el polinomio

$$6x^2 \quad -x \quad -2 = 0$$

$$2x \qquad +1 \rightarrow (3x)(+1) = \quad 3x +$$

$$3x \qquad -2 \rightarrow (2x)(-2) = \quad -4x$$

$$-x$$

$$(2x+1)(3x-2) = 0$$

$$2x + 1 = 0 \quad \vee \quad 3x - 2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{2}{3}$$

$$C.S = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right\}$$

II) MÉTODO DE BHASKARA

Se utiliza cuando el trinomio $ax^2 + bx + c = 0\,;\, a \neq 0$ *no es factorizable en* $\mathbb{Q}$ *. Luego las raíces (soluciones) de la ecuación esta dado por la formula:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde se obtienen las raíces:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde el número real $b^2 - 4ac$ *es el DISCRIMINANTE de la ecuación cuadrática.*

Ejemplo: *Resolver:*

$$6x^2 - x - 2 = 0$$

Solución:

$$a = 6;\; b = -1;\; b = -2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(6)(-2)}}{2(6)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12}$$

$$x = \frac{1 \pm 7}{12} \longrightarrow C.S = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right\}$$

NATURALEZA DE LAS RAICES

En la ecuación $ax^2+bx+c=0\,;a\neq 0$ *de coeficientes reales, con raíces* x_1 *y* x_2 *se cumple:*

1) *Si* $\boxed{b^2-4ac>0}$, *entonces las raíces* "x_1" y "x_2", *son raíces reales y diferentes.*

Ejemplo:

Resolver la ecuación: $x^2-5x+6=0$

Solución:

Tenemos que:

$a=1\,;b=-2\,;c=3$

Luego:

$\Delta=(-5)^2-4(1)(6)$

$\Delta=1>0$

Es decir, la ecuación tiene dos raíces reales y diferentes y estas se calculan usando el método de factorización:

$x^2-5x+6=0$

$x \quad -3$

$x \quad -2$

Luego se tiene: $x-3=0 \vee x-2=0$

$\therefore\ x_1=3 \vee x_2=2$

Luego el conjunto solución es: $C.S=\{3;2\}$

2) Si $\boxed{b^2-4ac=0}$, *entonces las raíces* "x_1" y "x_2", *son raíces reales e iguales.*

OBSERVACIÓN:

La ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, *tiene dos raíces reales e iguales o solución única, si el trinomio* $ax^2+bx+c=0$ *es un trinomio cuadrado perfecto.*

Ejemplo:

Resolver la ecuación: $4x^2-12x+9=0$

Solución:

Se tiene que:

$a=4\,;b=-12\,;c=9$

Luego:

$\Delta=(-12)^2-4(4)(9)$

$\Delta=0$

Es decir, la ecuación posee raíces reales e iguales y estas se calculan usando el método de factorización:

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

$2x \quad -3$

$2x \quad -3$

$(2x-3)^2 = 0$, *Se cumple cuando* $2x - 3 = 0 \vee 2x - 3 = 0$

Donde $x = \dfrac{3}{2} \vee x = \dfrac{3}{2}$

Luego el conjunto solución es: $C.S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

3) *Si* $\boxed{b^2 - 4ac < 0}$, *entonces las raíces* "x_1" *y* "x_2", *son raíces complejas y diferentes.*

Ejemplo:

Resolver la ecuación: $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Solución:

Se tiene que:

$a = 1$; $b = -2$; $c = 3$

Luego:

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(3)$

$\Delta = -2 < 0$

Es decir, la ecuación no posee raíces reales, pues son complejas y estas se determinan mediante el uso de la fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}i}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{2}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}i$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}i \quad \vee \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}i$$

donde: $\boxed{\left(\sqrt{-1} = i\right)}$ *número imaginario.*

PROPIEDADES DE LAS RAICES

En toda ecuación $ax^2+bx+c=0$; $a\neq 0$ *de coeficientes reales, con raíces* "x_1" *y* "x_2"*, se cumple:*

1. $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ ***(Suma de raíces)***

2. $x_1 . x_2=\dfrac{c}{a}$ ***(Producto de raíces)***

3. $|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}$ ***(Diferencia de raíces)***

4. $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=-\dfrac{b}{c}$ ***(Suma de las inversas de las raíces)***

Ejemplo:

Sean "x_1" y "x_2" *raíces de* $3x^2+7x+2k=0$

El valor de "k", si $(x_1+3)(x_2+3)=0$ *, es:*

Solución:

$3x^2+7x+2k=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-\left(-\dfrac{7}{3}\right)x+\dfrac{2k}{3}=0$

$x_1+x_2=-\dfrac{7}{3} \wedge x_1.x_2=\dfrac{2k}{3}$

Nos pide:

$(x_1+3)(x_2+3)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1.x_2+3(x_1+x_2)+9=0$

$\dfrac{2k}{3}+3\left(-\dfrac{7}{3}\right)+9=0 \quad \Rightarrow \quad k=-3$

RECONSTUCCION DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO A PARTIR DE SUS RAICES

Sean x_1 *y* x_2 *raíces de una ecuación cuadrática y denotemos:*

$$S=x_1+x_2 \quad \wedge \quad P=x_1.x_2$$

Luego la ecuación que origina dichas raíces viene dada por:

$$x^2-Sx+P=0$$

Ejemplo:

Dadas las raíces $x_1=5$ *y* $x_2=-7$ *, encontrar la ecuación que origina estas raíces.*

Solución:

$S=x_1+x_2=5+(-7)=-2$

$P=x_1.x_2=(5)(-7)=-35$

Luego la ecuación es:

$$x^2-(-2)x+(-35)=0$$

$$x^2+2x-35=0$$

RAICES ESPECIALES

A) Raíces Simétricas

"x_1" y "x_2" son raíces simétricas, cuando una de ellas es el inverso aditivo de la otra. Esto es:

$$x_1;\,x_2\ \textit{son simétricas}\ \Leftrightarrow\ x_1+x_2=0$$
$$\Leftrightarrow\ -\frac{b}{a}=0$$
$$\Leftrightarrow\ b=0$$

B) Raíces Recíprocas

"x_1" y "x_2" son raíces recíprocas, cuando una de ellas es la inversa multiplicativa de la otra. Esto es:

$$x_1;\,x_2\ \textit{son recíprocas}\ \Leftrightarrow\ x_1.x_2=1$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{c}{a}=1$$
$$\Leftrightarrow\ a=c$$

Ejemplo:
La suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación:
$(2k+2)x^2+(4-4x)x+k-2=0$, *sabiendo que las raíces son reciprocas, es:*

Solución:

$$(2k+2)x^2+4x-4x^2+k-2=0$$

$$(2k-2)x^2+4x+k-2=0$$

Identificando $a=2k-2;\ b=4;\ c=k-2$ *y como las raíces son reciprocas, entonces se cumple:*

$$a=c$$
$$2k-2=k-2\quad\Rightarrow\quad k=0,$$

luego la ecuación cuadrática queda:

$$-2x^2+4x-2=0$$
$$x^2-2x+1=0$$
$$\Rightarrow x_1=1\vee x_2=1$$
$$\therefore\ \ x_1^2+x_2^2=2$$

TEOREMA
Si las ecuaciones: $ax^2+bx+c=0$ *y* $dx^2+ex+f=0$ *son equivalentes, entonces:*

$$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$$

EJERCICIOS

1. *Si la ecuación:* $x^2-6x+n+1=0$, *admite como raíces a* x_1 *y* x_2, *tal que:*

$\frac{1}{2x_1}+\frac{1}{2x_2}=\frac{3}{5}$; *El valor de* "$n$" *es:*

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

2. *Si:* x_1 *y* x_2 *son las raíces de la ecuación:*

$3x^2+5x-1=2+x$, *el valor de:* $(x_1+1)^{-1}+(x_2+1)^{-1}$ *es:*

a) -1/2
b) 1/4
c) -1/4
d) 1/2
e) 2

3. *Si la ecuación tiene dos raíces con un mismo valor diferente de cero:*

$x^2-2(m^2-4m)x+m^4=0$; *el valor de "m", es:*

a) 1
b) 4
c) -2
d) -4
e) 2

4. *Al resolver la ecuación* $\frac{5}{2x+1}-\frac{8}{3x-4}=3$

El producto de las raíces obtenidas es:

a) 1
b) 4
c) -2
d) -4
e) 2

5. *Sabiendo que en la ecuación* $x^2-(m+2)x+m+1=0$

La suma de los cuadrados de sus raíces es el mínimo valor posible. La suma de raíces de la ecuación es:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

6. *Si* "a" *y* "b" *son las raíces de la ecuación* $x^2-100x+1=0$, *El valor de* $T=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, *es:*

a) $\sqrt{101}$
b) $\sqrt{102}$
c) $\sqrt{103}$
d) $\sqrt{104}$
e) $\sqrt{105}$

7. *Si la ecuación cuadrática* $x^2-2ax+3a=0$ *tiene solución única no nula, el valor de* (a^2+1) *es:*

a) 3
b) 10
c) 5
d) 2
e) 1

8. *Si:* $S=\{a-1;a+2\}$ *es el conjunto solución de la ecuación* $2x^2-10x+b=7$. *El valor de* "ab" *es:*

a) 15
b) 18
c) 21
d) 24
e) 30

9. *Luego de resolver la ecuación* $\sqrt{2x+1}=\frac{x}{2}+1$

La suma de soluciones es.

a) 0
b) 2/3
c) 4
d) 6
e) 7/2

10. *Si* $x_1;x_2$ *son raíces de la ecuación:*

$(a^4-b^4)x^2+(b^4-c^4)x=a^4-c^4$,

Con $a\neq\pm b;\ a,b,c\in\mathbb{R}$. *El valor de* $x_1^{x_2}+x_2^{x_1}-x_1x_2$, *es:*

a) a^2+b^2+c
b) $a^2b^2c^2$
c) 1
d) 0
e) $ab+ac+bc$

11. *Sabiendo que* x_1 *y* x_2 *son las raíces de la ecuación:*

$x^2+4x-3=0$

El valor de $H=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$ *es:*

a) -20/3
b) -29/3
c) -22/3
d) -23/3
e) -8

12. En la ecuación
$2x^2-(a-1)x+24=0$
El menor valor de "a", para que una de sus raíces sea el triple de la otra, es:

a) -15
b) -5
c) -7
d) 17
e) 9

13. Si las raíces de la ecuación:
$(m+3)x^2-(2m-5)x+2m-10=0$ son reciprocas. El valor de "m" es:

a) 9
b) 10
c) 11
d) 12
e) 13

14. Si "α" y "β" son las raíces de la ecuación
$x^2-2x-5=0$, la ecuación cuadrática cuyas raíces son "α^2" y "β^2", es:

a) $x^2+14x+25=0$
b) $x^2+14x+15=0$
c) $x^2-2x-1=0$
d) $x^2-14x-25=0$
e) $x^2-14x+25=0$

15. Al resolver la ecuación:
$(x+a+b+2c)^{-1}-x^{-1}=(a+c)^{-1}+(b+c)^{-1}$, una de sus raíces es:

a) $2a-c$
b) $2c-a^2$
c) $a+c$
d) $-b-c$
e) $a-b+c$

16. La ecuación
$x^2+(a-3)x-4=0$
Tiene raíces simétricas. Si x_0 es una raíz, el menor valor de $a+x_0$ es:

a) 12
b) 15
c) 17
d) 19
e) 13

17. Sabiendo que las raíces: $(2k+2)x^2+(4-4k)x+k-2=0$ son reciprocas
La suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación es:

a) $\frac{82}{9}$
b) $\frac{84}{9}$
c) $\frac{78}{9}$
d) $\frac{75}{9}$
e) $\frac{65}{9}$

18. Si las raíces de la ecuación
$x^2-(m+3)x+m+2=0$
Verifican la relación $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=3$, la suma de valores que puede tomar el parámetro "m" es:

a) 1
b) 2
c) 3
d) -1
e) -4

19. Luego de resolver la ecuación: $\frac{(3-x)^3+(4+x)^3}{(3-x)^2+(4+x)^2}=7$.
El conjunto solución es:

a) $C.S=\{-4,3\}$
b) $C.S=\{4,-3\}$
c) $C.S=\{-1,3\}$
d) $C.S=\{-4,0\}$
e) $C.S=\{-3,1\}$

20. Si la ecuación de segundo grado:
$(4-\beta)x^2+2(\beta x+1)=0$ tiene solución única. El valor de "β" es:

a) 2
b) 4 y -2
c) -4 y 2
d) 2 y 4
e) -2

21. Dada la ecuación $2x^2-(k-1)x+(k+1)=0$. El valor de "k" para que la diferencia de raíces sea uno, es:

a) -2
b) -3
c) 11
d) 1
e) 2

22. Dada la ecuación: $x^2-x+2=0$, de raíces x_1 y x_2

El valor de $\frac{x_1^2}{1+x_2}+\frac{x_2^2}{1+x_1}$ es:

a) 2
b) -2
c) 1
d) -1
e) 4

23. El valor de "m" para que las raíces de la ecuación:

$\frac{x(x-1)-(m-1)}{(x-1)(m-1)}=\frac{x}{m}$ sean iguales, es:

a) 1/6
b) 1/5
c) 1/4
d) 1/3
e) 1/2

24. Luego de resolver la ecuación:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{x+a+b+c}$

Una de sus raíces es:

a) $-b$
b) $-c$
c) $a+b$
d) $a-b$
e) $a+b+c$

25. La ecuación de segundo grado cuyas raíces sean 3 veces las inversas al cuadrado de las raíces de $x^2+x+12=0$, es:

a) $48x^2+23x+1=0$
b) $48x^2-23x+3=0$
c) $48x^2+23x+3=0$
d) $x^2+23x+31=0$
e) $16x^2-23x-3=0$

26. ¿Qué valor mínimo debe tener "m" para que las raíces de la ecuación:

$mx^2-(m+3)x+2m+1=0$

difieran en 2 unidades?

a) 1
b) -9/11
c) 2
d) -1/4
e) -1/3

27. Si "a" y "b" son raíces de la ecuación $2x^2-6ax+3a=0$, que son no nulas. El valor de "ab" es:

a) 3/4
b) 9/2
c) 9/4
d) 3/8
e) 9/8

28. Si las raíces de la ecuación $mx^2+3nx-1=0$

Son: $\frac{a+b}{2a-b}$ y $\frac{a+b}{3b}$. El valor de "n" es:

a) 3/2
b) 1/3
c) 1/2
d) 2/3
e) 1

29. Si 3 es una de las raíces reciprocas de la ecuación $3x^2+(a-1)x+b+2=0$. El valor "$a+b$" es:

a) 5
b) 7
c) -8
d) -9
e) 1



$f(x)=sgn(x)$ **ÁLGEBRA** $f(x)=ax^2+bx+c$ Lnx $\sqrt{x}$

8 INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

DESIGUALDAD

DEFINICIÓN.

Es la comparación que se establece entre dos expresiones reales diferentes. Los símbolos que se usan para hacer estas comparaciones son $"<"; ">"; "\leq" \; y \; "\geq"$

AXIOMAS DE DESIGUALDAD

1. ***Ley de Tricotomía*** $\forall a,b \in \mathbb{R}, a<b \vee a=b \vee a>b$

2. ***Ley Transitiva*** $\forall a,b,c \in \mathbb{R}, a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$

3. ***Ley Aditiva.*** $\forall a,b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}, a<b \Rightarrow a+c<b+c$

4. ***Ley Multiplicativa***

$I. \quad \forall a,b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}^+, a<b \Rightarrow a.c<b.c$

$II. \quad \forall a,b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}^-, a<b \Rightarrow a.c>b.c$

TEOREMAS DE DESIGUALDAD

1. $\forall a,b,c \in \mathbb{R} \; ; a<b<c \Rightarrow \frac{1}{c}<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

2. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}, a<b<c \Rightarrow a^{2n+1}<b^{2n+1}<c^{2n+1}; \; n \in \mathbb{Z}^+$

3. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}^+, a<b<c \Rightarrow a^{2n}<b^{2n}<c^{2n}; n \in \mathbb{Z}^+$

4. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}, a<b<c \Leftrightarrow a<b \wedge b<c$

5. $\forall a,b \in \mathbb{R}, a \geq b \Leftrightarrow a>b \vee a=b$

6. $\forall a \in \mathbb{R}; \; a^{2n} \geq 0$

7. • $\forall a \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{a}>0$ • $\forall a \in \mathbb{R}^-, \frac{1}{a}<0$

8. $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} a>b \\ c>d \end{cases}$ $\overline{a+c>b+d}$

9. $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$ $\begin{cases} a>b \\ c>d \end{cases}$ $\overline{a.c>b.d}$

10. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}^+, a<b<c \Rightarrow \frac{1}{c}<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

INTERVALOS

Son subconjuntos de $\mathbb{R}$, cuyos elementos están comprendidos entre dos números fijos que se denominan extremos.

I) Intervalos acotados.

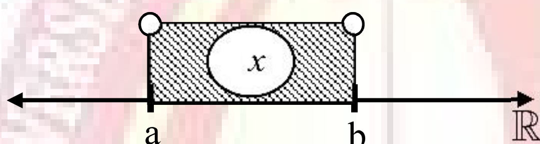
Son intervalos que están comprendidos entre dos números fijos que pertenecen a $\mathbb{R}$.

A) Intervalo abierto:

Son intervalos que representamos por $\langle\ ;\ \rangle$ en donde no se consideran los extremos. Están definidos de la forma siguiente:

$\langle a;b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$

Representación gráfica:



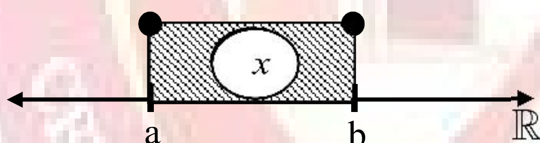
Además: $x \in \langle a;b\rangle \Leftrightarrow a < x < b$

B) Intervalo cerrado:

Estos intervalos los representamos por $[\ ;\ ]$, que a diferencia de los abiertos aquí si consideramos los. Están definidos de la forma siguiente:

$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \le x \le b\}$

Representación gráfica.



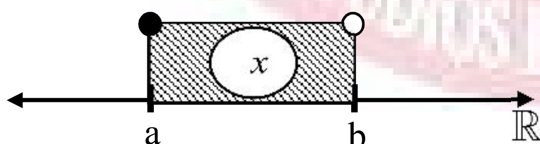
Además: $x \in [a;b] \Leftrightarrow a \le x \le b$

C) Intervalo semiabierto

Estos intervalos serán representados por $[\ ;\ \rangle$ o $\langle\ ;\ ]$ y se caracterizan por ser mixtos, es decir que se considera un extremo y el otro no. Están definidos de la forma.

- $[a;b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \le x < b\}$

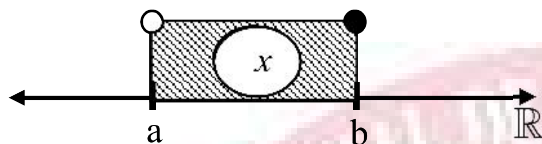
Representación gráfica.



Además: $x \in [a;b\rangle \Leftrightarrow a \le x < b$

- $\langle a;b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \le b\}$

Representación gráfica.



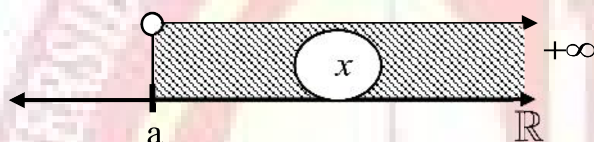
Además: $x \in \langle a;b] \Leftrightarrow a < x \le b$

II) Intervalos no acotados.

Son aquellos intervalos en donde se tiene que al menos uno de sus extremos no es un número real.

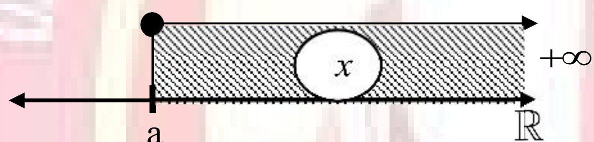
A) Intervalo acotado por izquierda

- $\langle a;+\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} / a < x < \infty\} = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$



Además: $x \in \langle a;+\infty\rangle \Leftrightarrow x > a$

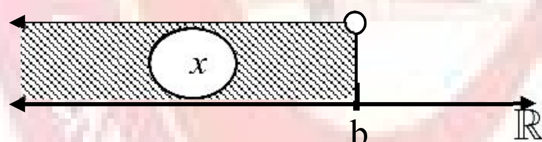
- $[a;+\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} / a \le x < \infty\} = \{x \in \mathbb{R} / x \ge a\}$



Además: $x \in [a;+\infty\rangle \Leftrightarrow x \ge a$

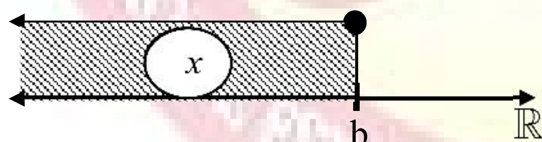
B) Intervalo acotado por derecha

- $\langle -\infty;b\rangle = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < b\} = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$



Además: $x \in \langle -\infty;b\rangle \Leftrightarrow x < b$

- $\langle -\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x \le b\} = \{x \in \mathbb{R} / x \le b\}$



Además: $x \in \langle -\infty;b] \Leftrightarrow x \le b$

OBSERVACIONES:

- ✓ $\mathbb{R} := \langle -\infty;+\infty\rangle$
- ✓ $\phi := \langle a;a\rangle$
- ✓ $\{a\} := [a;a]$
- ✓ *Dado que los intervalos son conjuntos, entonces podemos operarlos usando las operaciones definidas para conjuntos arbitrarios.*

INECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA VARIABLE REAL

DEFINICIÓN.
Es una desigualdad que tiene una de las formas siguientes:

$$\{a,b\} \subset \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \begin{cases} \bullet\ ax+b<0 \\ \bullet\ ax+b>0 \\ \bullet\ ax+b\leq 0 \\ \bullet\ ax+b\geq 0 \end{cases}$$

CONJUNTO SOLUCIÓN

El conjunto solución, está dado por los valores reales de la variable "x", que satisface la inecuación.

- $ax+b<0 \Rightarrow x<-\dfrac{b}{a} \Rightarrow C.S=\left\langle -\infty; -\dfrac{b}{a}\right\rangle$
- $ax+b>0 \Rightarrow x>-\dfrac{b}{a} \Rightarrow C.S=\left\langle -\dfrac{b}{a}; +\infty\right\rangle$
- $ax+b\leq 0 \Rightarrow x\leq -\dfrac{b}{a} \Rightarrow C.S=\left\langle -\infty; -\dfrac{b}{a}\right]$
- $ax+b\geq 0 \Rightarrow x\geq -\dfrac{b}{a} \Rightarrow C.S=\left[-\dfrac{b}{a}; +\infty\right\rangle$

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución de la inecuación $(x+1)^2+2x-1\geq x^2+8$

Solución:

$x^2+2x+1+2x-1\geq x^2+8$

$4x\geq 8$

$x\geq 2 \Rightarrow CS=[2;+\infty\rangle$

EJERCICIOS

1. *Sean los intervalos* $A=[-3;7]$ *y* $B=\langle 1;10\rangle$. *La suma de los elementos enteros de* $A\cap B$ *, es:*

a) 28
b) 27
c) 36
d) 35
e) 21

2. *Dados los conjuntos:*
$A=\{x\in\mathbb{R}/-1\le x<5\}$
$B=\{x\in\mathbb{R}/5\le x<7\}$
El conjunto $A\cup B$ *es:*

a) $\langle -1;7\rangle$
b) $[-1;6]$
c) $\langle -1;5\rangle$
d) $[-1;7\rangle$
e) $[-1;7]-\{5\}$

3. *Si:* $x\in[1/2;1\rangle$, *entonces:* $\dfrac{4x^2-3}{2}$, *pertenece al intervalo:*

a) $\langle -1/2;1]$
b) $[-1/2;3/2\rangle$
c) $[-1;1/2\rangle$
d) $\langle 1/2;+\infty\rangle$
e) $\langle -\infty;-1\rangle$

4. *Si* $x\in\langle 2;3\rangle$, *la expresión* $H(x)=\dfrac{10}{x^2+1}$ *pertenece al intervalo:*

a) $\langle 1;2\rangle$
b) $\langle 1;3\rangle$
c) $\langle 2,3\rangle$
d) $[1;2]$
e) $[1;3]$

5. *Si:* $x\in\langle -1;1/2\rangle$, *entonces:* $\dfrac{x}{x-1}$, *pertenece al intervalo:*

a) -1/2
b) 1/4
c) -1/4
d) 1/2
e) 2

6. *Si* $x\in\langle -3;0\rangle$, *la variación de* $N(x)=\dfrac{x+1}{2-x}$ *, es:*

a) $\left\langle -\dfrac{2}{5};0\right\rangle$
b) $\left\langle -\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right\rangle$
c) $\left\langle \dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right\rangle$
d) $\left\langle -\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{2}\right\rangle$
e) $\left\langle 0;\dfrac{5}{2}\right\rangle$

7. *Si se cumple que:* $2x-5<x+3<3x-7$
Los valores enteros de "x" *satisfacen la desigualdad es:*

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

8. *Luego de resolver la inecuación:*
$(2x-1)^2+x(x+1)+3>5x(x-3)+2(x-5)$
El conjunto solución es:

a) $\left\langle -\infty;\dfrac{7}{5}\right\rangle$
b) $\left\langle -\dfrac{7}{5};0\right\rangle$
c) $\left\langle -\dfrac{7}{5};+\infty\right\rangle$
d) $\left\langle \dfrac{7}{5};+\infty\right\rangle$
e) $\left\langle 0;\dfrac{7}{5}\right\rangle$

9. *Luego de resolver la siguiente inecuación:*
$x-1<2x+2<-3x+3$
El conjunto solución es:

a) $\left\langle 1;\frac{1}{5}\right\rangle$
b) $\left\langle 1;2\right\rangle$
c) $\left\langle -3;\frac{1}{5}\right\rangle$
d) $\left\langle -1;\frac{1}{2}\right\rangle$
e) $\left\langle -2;\frac{1}{3}\right\rangle$

10. *El conjunto solución de:*
$3x<24+x<2x+12$ *, es:*

a) $\mathbb{R}$
b) $\{12\}$
c) $\left\langle -12;12\right\rangle$
d) $\left\langle 12;+\infty\right\rangle$
e) ϕ

11. *El menor número par que verifica:*
$\frac{12x-8}{3}+\frac{2x-3}{4}>\frac{6x-8}{3}+\frac{8x-4}{6}$*, es:*

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

12. *El conjunto solución de la inecuación*
$\left(\frac{x-1}{a}-\frac{x}{2}\right)\left(1-a^2\right)<0$ *con* $1<a<2$*, es:*

a) $\left[2;+\infty\right\rangle$
b) $\left\langle \frac{2}{2-a};+\infty\right\rangle$
c) $\left\langle -\infty;\frac{2}{2-a}\right\rangle$
d) $\left\langle a;+\infty\right\rangle$
e) $\left\langle -\infty;a\right\rangle$

13. *El número de valores enteros para "x" satisfacen la inecuación* $2<\frac{x-7}{x-5}<12$*, es:*

a) 1
b) 6
c) 3
d) 5
e) 2

14. *Si:* $\frac{x-\frac{1}{2}}{4}-\frac{2x+1}{2}\le 5x-1$*; cuyo* $C.S=\left[\frac{a}{b};+\infty\right\rangle$.
El valor de "$a+b$", es:

a) 47
b) 48
c) 49
d) 50
e) 25

15. *El conjunto solución de la inecuación:*
$-\frac{1}{3}<\frac{2x-3}{x+2}<\frac{4}{3}$*, es:*

a) $\left\langle -2;1\right\rangle$
b) $\left\langle -2;\frac{17}{2}\right\rangle$
c) $\left\langle -2;2\right\rangle$
d) $\left\langle 1;\frac{17}{2}\right\rangle$
e) $\left\langle -1;\frac{17}{2}\right\rangle$

16. *Si:* $1\le x\le 4$ *y* $a\le\frac{x+4}{x+3}\le b$*. El valor de "$a+b$" es:*

a) 13/7
b) 19/28
c) 17/4
d) 67/28
e) 65/68

17. *El conjunto solución de la inecuación:*
$\frac{3x}{5}-\frac{7}{10}-\frac{x}{20}>\frac{1}{5}+\frac{7x}{20}$*, es:*

a) $\left\langle \frac{9}{2};+\infty \right\rangle$

b) $\left\langle -\infty;\frac{9}{2} \right\rangle$

c) $\left\langle -\frac{9}{2};\frac{9}{2} \right\rangle$

d) $\left\langle -\frac{9}{2};+\infty \right\rangle$

e) $\langle 0;+\infty \rangle$

18. *El mayor valor entero que puede tomar "x" en la inecuación:*

$$(6x-2)\frac{5}{8}-\left(1-\frac{2x}{3}\right)\frac{7}{3}<4x+\left(\frac{x}{2}-\frac{5}{12}\right)\frac{2}{3}$$ *, es:*

a) 5
b) 10
c) 11
d) 2
e) 3

19. *Si* $-2\le x\le 0$*, la expresión* $\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$ *pertenece al intervalo:*

a) $[-4;0]$

b) $[0;2]$

c) $[0;3]$

d) $[0;4]$

e) $\left[0;\frac{3}{2}\right]$

20. *Luego de resolver la inecuación:*

$$\frac{x-4}{2}+\frac{x-12}{6}+\frac{x-24}{12}+\ldots+\frac{x-220}{110}<2,72$$

Su conjunto solución es:

a) $\langle 25;+\infty\rangle$

b) $\langle -\infty;-25\rangle$

c) $\langle -\infty;5\rangle$

d) $\langle -\infty;25\rangle$

e) $\langle 5;25\rangle$

21. *Los valores de "x" que verifican la inecuación:*

$$1<\frac{3x+10}{x+7}<2$$ *, son:*

a) $-1/2<x<7$
b) $-1<x<5$
c) $-3/2<x<4$
d) $0<x<4$
e) $1<x<5$

22. *Si "x" varia en el intervalo* $\langle 1;5]$ *, la expresión:*

$T(x)=x^2-4x+2$ *varia en el intervalo:*

a) $\langle -1;1]$

b) $\langle 0;5\rangle$

c) $\langle 3;6]$

d) $[-2;6]$

e) $[-2;7]$

23. *Si* $x\in\langle -5;-3\rangle$. *La longitud del intervalo de la variación de* $\frac{10}{x^2+4x+5}$ *es:*

a) 5
b) 6
c) 4
d) 8
e) 10

24. *La cantidad de números primos que verifican las siguientes desigualdades*

$$\frac{x}{2}-3<\frac{x}{5}+3 \ \wedge \ 2x+3<5x-3$$ *, es:*

a) 9
b) 2
c) 3
d) 4
e) 7

25. *Si:* $x\in[5;10]$ *y además se tiene que:*

$$N\le\frac{2x-1}{3x+2}\le M$$

Luego el valor de $32M-17N$ *es:*

a) 18
b) 16
c) 14
d) 12
e) 10

26. *Si se tiene que:*

$$\frac{x}{b}+\frac{b}{a}>\frac{x}{a}+\frac{a}{b} \text{ con } \{a;b\}\subset\mathbb{R}^+;\ b>a$$

El conjunto solución de la inecuación es:

a) $\langle a+b;+\infty\rangle$
b) $\langle -\infty;a+b\rangle$
c) $\langle a;b\rangle$
d) $[a+b;+\infty\rangle$
e) $\langle -\infty;a+b]$

27. *Luego de resolver la inecuación* $-1<\dfrac{x+x^2}{1-x^2}\leq 1$

Se tiene por conjunto solución a:

a) $x\geq 1/2$
b) $x\leq 1/2 \wedge x\neq -1$
c) $0<x\leq 1/2$
d) $x>0$
e) $0<x<1$

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA VARIABLE REAL

DEFINICIÓN.
La inecuación cuadrática o de segundo grado es una variable real "x" presenta una de las siguientes formas:

$$\{a,b,c\}\subset\mathbb{R}\wedge a\neq 0\begin{cases}\bullet\ ax^2+bx+c<0\\ \bullet\ ax^2+bx+c>0\\ \bullet\ ax^2+bx+c\leq 0\\ \bullet\ ax^2+bx+c\geq 0\end{cases}$$

SOLUCIÓN GENERAL
Para resolver una inecuación de segundo grado se recomienda que $a>0$, en caso contrario multiplicar por (-1) y la desigualdad se invierte. Luego teniendo en cuenta el discriminante "$\Delta=b^2-4ac$" se presentan los casos:

1. Si $b^2-4ac>0$; ($a>0$) se cumple:

La inecuación se resuelve por puntos críticos, pues el trinomio ax^2+bx+c siempre es factorizable (ya sea por aspa simple o utilizando la fórmula de Bhaskara) en el campo de los números reales. El procedimiento es:

- *Pasar todas expresiones a un solo miembro dejando cero en el otro.*
- *Se factoriza la expresión, luego se iguala cada factor a cero para obtener los puntos críticos.*
- *Estos puntos críticos se ubican sobre la recta real, los cuales dividen a la recta en intervalos. Luego se asignan los signos (+) y (–) en forma alternada empezando del intervalo de la derecha a izquierda.*
- *La solución de la inecuación estará expresada por las zonas positivas si el sentido de la desigualdad original es mayor que (>) o mayor o igual (≥) o por las zonas negativas si es que el sentido de la desigualdad original es menor que (<) o menor o igual que (≤)*

Ejemplo: *Resolver* $x^2-2x-24>0$

Solución:

Tenemos $P(x)=x^2-2x-24$

$\Rightarrow\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(-24)$

$\Rightarrow\Delta=100>0$

Luego tenemos que:

$a>0\wedge\Delta>0$

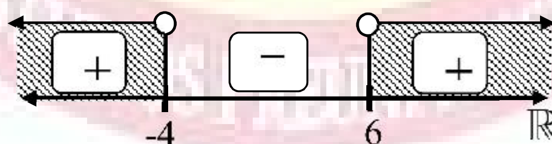
Usando para la solución M.P.C:

$x^2-2x-24>0$

$(x-6)(x+4)>0$

$x-6=0\wedge x+4=0$

$\Rightarrow\begin{matrix}x=6\\x=-4\end{matrix}\Big\}$ *Puntos Críticos (P.C)*



$$\therefore C.S=\langle-\infty;-4\rangle\cup\langle 6;+\infty\rangle$$

2. Si $b^2-4ac=0$; ($a>0$) se cumple:

- $ax^2+bx+c>0 \longrightarrow C.S=\mathbb{R}-\{x_1\}$
- $ax^2+bx+c<0 \longrightarrow C.S=\phi$
- $ax^2+bx+c\geq 0 \longrightarrow C.S=\mathbb{R}$
- $ax^2+bx+c\leq 0 \longrightarrow C.S=\{x_1\}$

Ejemplo: *Resolver:* $4x^2+4x+1>0$

Solución:

Tenemos $P(x)=4x^2+4x+1$

$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(4)^2-4(4)(1)$

$\Rightarrow \Delta=0$

Luego se tiene que:

$a>0 \wedge \Delta=0$

Además:

$4x^2+4x+1\geq 0$

$(2x+1)^2\geq 0$

$2x+1=0 \longrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ C.S=\mathbb{R}$

3. Si $b^2-4ac<0$; ($a>0$) se cumple:

- $ax^2+bx+c>0 \longrightarrow C.S=\mathbb{R}$
- $ax^2+bx+c<0 \longrightarrow C.S=\phi$
- $ax^2+bx+c\geq 0 \longrightarrow C.S=\mathbb{R}$
- $ax^2+bx+c\leq 0 \longrightarrow C.S=\phi$

Ejemplo: *Resolver:* $5x^2+4x+3>0$

Solución:

Tenemos $P(x)=5x^2+4x+3$

$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(4)^2-4(5)(3)$

$\Rightarrow \Delta=-44<0$

Luego se tiene que:

$a>0 \wedge \Delta<0$

Además:

$(2(5)x+4)^2-(-44)<0$

$(2(5)x+4)^2+44<0$

$\therefore\ C.S=\phi$

TEOREMA:

Si el trinomio ax^2+bx+c *con* $\{a,b,c\}\subset\mathbb{R}$ *tiene discriminante* $b^2-4ac<0$; $a>0$ *entonces* $ax^2+bx+c>0;\forall x\in\mathbb{R}$.

EJERCICIOS

1. *Luego de resolver la inecuación:* $x^2 \geq 625$
El conjunto solución es:

a) $\mathbb{R}-[-15;25\rangle$
b) $\mathbb{R}-[-25;15]$
c) $\mathbb{R}-[-25;25\rangle$
d) $\mathbb{R}-\langle -25;25\rangle$
e) $\mathbb{R}-[-25;25]$

2. *Al resolver la inecuación:*
$-x^2+5x>4$. *Tenemos como conjunto solución a:*

a) $\langle -4;0\rangle$
b) $[-4;-1]$
c) $[-1;4]$
d) $\langle 1;4\rangle$
e) $[1;4]$

3. *El menor valor entero de "x" que satisface:*
$42 \leq x^2+x \leq 110$ *es:*

a) -11
b) -1
c) 11
d) 0
e) 3

4. *Dada la ecuación cuadrática:*
$x^2-mx+m=-3$
Cuyas soluciones son reales, luego el conjunto de valores que toma "m" *es:*

a) $\langle -\infty;3]\cup[7;+\infty\rangle$
b) $\langle -\infty;-4]\cup[8;+\infty\rangle$
c) $\langle -\infty;-2]\cup[6;+\infty\rangle$
d) $\langle -\infty;5]$
e) $\mathbb{R}$

5. *Luego de resolver la inecuación* $2x^2-3x+1\geq 0$, *se obtiene como conjunto solución:*

a) $\mathbb{R}$
b) $\langle 1/2;1\rangle$
c) $\mathbb{R}-\langle 1/2;1\rangle$
d) $\mathbb{R}-[1/2;1\rangle$
e) $\mathbb{R}-\langle 1/2;1]$

6. *Luego de resolver la inecuación:* $(x+1)^2+x^2\leq -x$
El cuadrado de la mayor solución es:

a) 1/2
b) 16
c) 1/4
d) 9
e) 1

7. *Dada la inecuación* $x^2-kx+9<0$
Si su conjunto solución es $\langle 1;9\rangle$, *entonces el valor de* "k" *es:*

a) 9
b) 12
c) 10
d) 13
e) 15

8. *Si la siguiente inecuación* $2x^2+x+n>0$ *tiene como conjunto solución a* $\mathbb{R}$. *Los valores que toma* "n", *son:*

a) $n\in\langle 1/8;+\infty\rangle$
b) $n\in[0;1/8]$
c) $n\in\langle -\infty;1/8\rangle$
d) $n\in[1/8;+\infty\rangle$
e) $n\in\langle -\infty;8]$

9. *Dados los conjuntos:*

$A = \{(x+1) \in \mathbb{R} / x^2 - 2x + 1 > 0\}$

$B = \{(x-2) \in \mathbb{R} / x^2 + 6x + 9 \geq 0\}$

$C = \left\{\frac{1}{x} \in \mathbb{R} / 4x^2 - 4x + 1 \leq 0\right\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} / 25x^2 + 10x + 1 < 0\}$

El conjunto $[(A \cap B) - D] \cup C$ *viene dado por:*

a) $\{2\}$
b) $\left\{2; \frac{1}{5}\right\}$
c) $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{5}\right\}$
d) $\mathbb{R} - \{2\}$
e) $\mathbb{R}$

10. *Luego de resolver la inecuación:*

$\frac{x(x+1)}{2x-1} < 1$, *se obtiene* $C.S = \left\langle -\infty; \frac{a}{2} \right\rangle$

El valor de "a" es:

a) 1/2
b) 1/4
c) 1
d) -1/2
e) -1/4

11. *Si* $\langle -1; 3 \rangle$ *es el conjunto solución de la inecuación cuadrática:* $x^2 + ax + b < 0$

El valor de $\frac{a+b}{a-b}$ *es:*

a) -1
b) -4
c) -5
d) -2
e) -3

12. *Luego de resolver la inecuación:*

$$\frac{x+5}{x-6} \leq \frac{x-1}{x-3}$$

El conjunto solución viene dado por:

a) $\left\langle -\infty; \frac{7}{3} \right] \cup \langle 3; 6 \rangle$
b) $\langle 3; 6 \rangle$
c) $\left\langle -\infty; \frac{7}{3} \right\rangle \cup \langle 3; 6 \rangle$
d) $\left\langle -\infty; \frac{7}{3} \right]$
e) $\langle -\infty; 6]$

13. *Al resolver* $\frac{(x-1)^{30}(x+2)^3}{(x^2+x+2)(x-5)} \geq 0$, *se tiene como conjunto solución* $C.S = (\mathbb{R} - \langle a; b]) \cup \{1\}$. *El valor de* $T = b - a$ *es:*

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

14. *Dar el conjunto solución de:*

$$\frac{x^2 + x + 1}{x(x-1)(x+2)} \leq 0$$

a) $\langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle$
b) $\langle -\infty; -2 \rangle$
c) $\langle -\infty; 1 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$
d) $\langle 2; +\infty \rangle$
e) $\langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$

15. *Se tiene los conjuntos:*

$A = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 3x - 2 > 0\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4x - 5 \leq 0\}$

El conjunto $A \cap B$, *viene dado por:*

a) $[-1; -1/2\rangle$
b) $[-1/2; 2\rangle$
c) $[-1; 5]$
d) $[-1; -1/2\rangle \cup \langle 2; 5]$
e) $\langle 2; 5]$

16. *Dadas las inecuaciones:*

$$x^2-7x-8<0 \;\wedge\; x^2-x-6\geq 0$$

La cantidad de valores enteros que verifican ambas inecuaciones es:

a) 1
b) 6
c) 3
d) 5
e) 2

17. *Si la inecuación* $-x^2-2x+5\leq E$ *se verifica para todo* $x\in\mathbb{R}$*. El menor valor de* "E" *es:*

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

18. *Después de resolver:*

$$x^3+4x^2-2x-8<0$$

El mayor entero que verifica la desigualdad es:

a) 0
b) 2
c) -2
d) -1
e) 1

19. *Luego de resolver:*

$$\frac{(1-x)(x+x^2)}{-x^2-x+2}\leq 0$$

El conjunto solución es:

a) $\langle -\infty;-2\rangle\cup\langle 0;1]$
b) $\langle -\infty;2]\cup[3;4\rangle$
c) $\langle -\infty;-2\rangle\cup\langle -1;0\rangle$
d) $\langle -\infty;-2\rangle\cup[-1;0]$
e) ϕ

20. *El conjunto solución de* $\dfrac{2x-3}{x-2}\geq 3$*, es:*

a) $[2;3]$
b) $\langle 2;3\rangle$
c) $\langle 2;3]$
d) $[2;3\rangle$
e) $\langle 2;3]$

21. *Si en la inecuación cuadrática siguiente, se cumple que para todo* $x\in\mathbb{R}$ $x^2+ax-2<2x^2-2x+2$

El conjunto de valores de "a" *es:*

a) $a\in\langle -6;2\rangle$
b) $a\in\langle -10;-7\rangle$
c) $a\in\langle 1;3\rangle$
d) $a\in\langle -15;-10\rangle$
e) $a\in\langle 3;6\rangle$

22. *Si la inecuación* $(2x^2+1)(x^2+5x+1)>0$ *se cumple para todo* $x\in\mathbb{R}-[m;n]$.

El valor "$m.n$" *es:*

a) 1
b) -3
c) -4
d) -1
e) 0

23. *Luego de resolver la inecuación:*

$$x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12>0$$

El conjunto solución que se tiene es:

a) $\langle -3;-2\rangle\cup\langle -1;1\rangle\cup\langle 2;+\infty\rangle$
b) $\langle -3;-2\rangle$
c) $\langle -3;-2\rangle\cup\langle 2;+\infty\rangle$
d) $\langle -3;+\infty\rangle$
e) $\langle -1;1\rangle\cup\langle 2;+\infty\rangle-\{3\}$

24. *Determinar el conjunto solución de:* $x\leq\dfrac{1}{x}$

a) $\langle -\infty;-1]\cup\langle 0;1]$
b) $[-1;0\rangle\cup[1;+\infty\rangle$
c) $\langle 0;1]$
d) $\langle -\infty;-1\rangle\cup[0;1\rangle$
e) $\langle -1;0]\cup\langle 1;+\infty\rangle$

25. *Al resolver la inecuación:*

$$\frac{1-8x}{x^2+4x+3}\leq -1$$

El conjunto solución viene dado por:

a) $\langle -3;-1\rangle$

b) $[1;3]$

c) $\langle -3;-1\rangle \cup \{2\}$

d) $\langle -3;-1\rangle - \{-2\}$

e) $[-3;-1]$

26. *Si las raíces de la ecuación:*
$x^2+ax+1=0$ *son positivas, sobre el valor* "a" *lo verdadero es:*

a) $a<0$
b) $a>0$
c) $a\geq 2$
d) $a\leq -2$
e) $a\in \mathbb{Z}$

27. *Al resolver la inecuación:*

$$\frac{(2x-3)(x^3+1)^{2021}}{x^3+x-2}>0$$

El complemento de su conjunto solución es:

a) $\left\langle -\infty;-1\right] \cup \left[\frac{3}{2};+\infty\right\rangle$

b) $\left\langle -\infty;-1\right] \cup \left[1;\frac{3}{2}\right]$

c) $\left[-\frac{3}{2};-1\right] \cup \left[1;+\infty\right\rangle$

d) $\langle -1;1\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2};+\infty\right\rangle$

e) $\left\langle -\infty;-1\right] \cup \left[1;+\infty\right\rangle - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

28. *Dado el polinomio* $P(x)=x^2-6x+11$, *donde* $P(x)\leq k$ *tiene como conjunto* $[0;r]$. *El valor* $2k-5r$ *es:*

a) 8
b) -9
c) 0
d) -8
e) -2

29. *El conjunto de valores reales de* "a" *para los cuales la siguiente desigualdad se verifica para todo valor real de* "x".

$$3a(a+2)x^2+3(x+1)>x(9x+8a)\text{, es:}$$

a) $\langle -3;1\rangle$

b) $\langle 1;4\rangle$

c) $\langle 0;2\rangle$

d) $\langle -\infty;-3\rangle \cup \langle 1;+\infty\rangle$

e) $\langle 1,5\,;2,786\rangle$

30. *El conjuntos solución de:*

$$\frac{(2x+1)(x^2+1)}{(x+1)(4x^2+4x+1)} \leq \frac{-2x(2x+1)}{(1+4x+4x^2)(1+x)} \quad \text{es:}$$

a) $\langle -\infty;-1]$

b) $\langle 1/2;+\infty\rangle$

c) $\langle -1;-1/2\rangle$

d) $[1;2]$

e) $\langle 1/2;1\rangle$



f(x)=sgn(x) Ln x ÁLGEBRA $f(x)=ax^2+bx+c$ $\sqrt{x}$

9 ECUACIONES E INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

VALOR ABSOLUTO

DEFINICIÓN:

El valor absoluto de un número real $x \in \mathbb{R}$ *, denotado por* $|x|$ *, es el número no negativo dado por:*

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

- $|-3| = 3$
- $|100| = 100$

PROPIEDADES:

El valor absoluto satisface las siguientes propiedades:

1. $|x| \geq 0 \quad ;\forall x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = |-x| \quad ;\forall x \in \mathbb{R}$
3. $|x| \geq x \quad ;\forall x \in \mathbb{R}$
4. $\sqrt{x^2} = |x| \quad ;\forall x \in \mathbb{R}$
5. $|x|^2 = x^2 \quad ;\forall x \in \mathbb{R}$
6. $|x.y| = |x|.|y| \quad ;\forall x;y \in \mathbb{R}$
7. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad ;\forall x;y \in \mathbb{R} \wedge y \neq 0$
8. $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x;y \in \mathbb{R}$ (*Desigualdad triángular*)

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

TEOREMA 1:

$$|a| = b \Leftrightarrow [b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)]$$

TEOREMA 2

$$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$$

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

TEOREMA 3. Sean $x, a \in \mathbb{R}$

i) $|x| < a \Leftrightarrow a > 0 \wedge (-a < x < a)$

ii) $|x| \leq a \Leftrightarrow a \geq 0 \wedge (-a \leq x \leq a)$

iii) $|x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$

iv) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$

TEOREMA 4. Dados $a, b \in \mathbb{R}$

i) $|a| < |b| \Leftrightarrow (a+b)(a-b) < 0$

ii) $|a| \leq |b| \Leftrightarrow (a+b)(a-b) \leq 0$

iii) $|a| > |b| \Leftrightarrow (a+b)(a-b) > 0$

iv) $|a| \geq |b| \Leftrightarrow (a+b)(a-b) \geq 0$

EJERCICIOS

1. *Luego de resolver* $|2x+3|=6$ *, la suma de soluciones es:*

a) 0
b) 8
c) -3
d) 4
e) 1

2. *El valor para* $"x"$*, de modo que se verifique* $|x-2|=5-x-(10-x)$ *, es:*

a) $\{-3;7\}$
b) $\{3;-7\}$
c) $\{1;0\}$
d) $\{7\}$
e) ϕ

3. *Una solución de:* $|2x+3|=|x-1|$ *es:*

a) 2/3
b) -2/3
c) 4
d) -1/4
e) 3/2

4. *Dada la ecuación:* $|3x-|x-1||=x-2$ *, el cardinal de su conjunto solución es:*

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) Infinitas

5. *El cardinal del conjunto* $A=\{x\in\mathbb{Z}/\,||2x+1|-3|<2\}$ *, es:*

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 5

6. *La suma de soluciones de la siguiente ecuación* $||x-2|-3|=1$ *, es:*

a) 8
b) 12
c) 6
d) 4
e) 0

7. *El conjunto solución de la ecuación* $|x||x+1|+|x+2||x+1|=0$ *, es:*

a) $\{-1;0;1\}$
b) $\{-1\}$
c) $\{2;0;1\}$
d) $\{0;1\}$
e) $\{1\}$

8. *La suma de soluciones de la siguiente ecuación* $|7|x|+1|=29$ *es:*

a) -1
b) 1
c) 3
d) 0
e) 2

9. *Luego de resuelva la ecuación:* $|3x-5|=|2x+7|$
La suma de los valores absolutos de las soluciones es:

a) 59/6
b) 5/61
c) 1/32
d) 61/5
e) 62/5

10. *Luego de resolver la inecuación* $|4-x|>|2+3x|$ *, el conjunto solución viene dado por:*

a) $\langle 1/2;3\rangle$
b) $\langle -1/2;3\rangle$
c) $\langle -3;1/2\rangle$
d) $\langle -1/2;1\rangle$
e) $\langle -2;3\rangle$

11. *Al resolver la inecuación* $5+|x^2+3x-2|\leq 4$ *el conjunto solución, es:*

a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R}-\{0,2\}$
c) $\varnothing$
d) $[-4,5]$
e) $\langle -4,-1\rangle\cup\langle -1,5\rangle$

12. *La suma de las raíces de la ecuación.* $|6-3x|+|12x-24|-16x+|x-2|=0$

a) 0
b) 1
c) 2
d) 4
e) 5

13. *Hallar el valor simplificado de la expresión* $M=\dfrac{|12+5x|-|4x-12|}{3x}$, si $x\in\langle 0,3\rangle$

a) 7
b) -5
c) 4
d) 3
e) 9

14. *El conjunto solución de* $x^2-2|x|-3=0$*, es:*

a) $\{3\}$
b) $\{-3;3\}$
c) $\{-1\}$
d) $\{6;-3\}$
e) $\{8;3\}$

15. *El conjunto solución de la ecuación* $|x-3|=|4x|$*, es:*

a) $\left\{-1;\frac{3}{5}\right\}$
b) $\left\{2;\frac{3}{4}\right\}$
c) $\left\{\frac{3}{4}\right\}$
d) $\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$
e) $\left\{\frac{3}{5};-1\right\}$

16. *Al resolver la ecuación* $||x|-3|=3$ *se obtiene como conjunto solución a:*

a) $\{-6;6\}$
b) $\{6\}$
c) $\{-6;0;6\}$
d) $\{6;0\}$
e) $\{-6;-1;1;6\}$

17. *Después de resolver la inecuación* $||x-1|-x+2|<5$. *El menor valor entero que verifica es:*

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

18. *Luego de resolver:*
$|2x-3|<4$
El conjunto solución es:

a) $\langle -1/2;7/2\rangle$
b) $\langle 1/2;7/2\rangle$
c) $\langle 1;7\rangle$
d) $\langle -2;1\rangle\cup\langle 2;3\rangle$
e) ϕ

19. *Luego de resolver la siguiente inecuación:*
$|x+2|^2-3|x+2|-10\le 0$
El conjunto solución es:

a) $[-7;7]$
b) $[-3;3]$
c) $[-3;6]$
d) $[-3;7]$
e) $[-7;3]$

20. *Al resolver:*
$|x+4|-3|x-1|=4$
La suma de sus raíces es:

a) $\frac{9}{11}$
b) $\frac{7}{8}$
c) $\frac{4}{7}$
d) $\frac{2}{7}$
e) $\frac{9}{4}$

21. *Al resolver:*
$|x^2-9|\geq 7$
un intervalo solución es:

a) $\langle -\infty;4\rangle$
b) $[-2;2]$
c) $\langle -\infty;-2\rangle$
d) $\langle \sqrt{2};+\infty\rangle$
e) $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$

22. *Si* $x\in\langle -\infty;a]\cup[b;+\infty\rangle$ *es la solución de la inecuación*
$(|x-1|+|x-2|)(|1-x|-|2-x|)\leq x^2-6$
El valor "$a+b$" *es:*

a) 4
b) 3
c) 2
d) 1
e) 0

23. *La suma del mayor y menor número que satisface la inecuación* $\frac{4}{|x^2-5|}\geq 1$ *, es:*

a) 0
b) 1
c) 2
d) 5
e) 6

24. *Al resolver:*
$|x^5-2x^2+|x|-4|<|x|-(|x|+4)$
El conjunto solución que se obtiene es:

a) $[1;2]$
b) $[-1;1]$
c) $\langle -1;1\rangle\cup[1;2]$
d) $\mathbb{R}$
e) ϕ

25. *Luego de resolver:*
$|x-3|\leq 5x$
El menor valor que puede tomar "x" *es:*

a) -3/4
b) -1/2
c) 1/2
d) 2
e) 0

26. *El cardinal del conjunto* $A=\{x\in\mathbb{Z}/\,||2x+1|-3|<2\}$ *es:*

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 5

27. *Dados los conjuntos:*
$A=\{x\in\mathbb{R}/\,|x-3|\leq 5\}$
$B=\{x\in\mathbb{R}/\,|x+3|\geq 5\}$
El conjunto $A\cap B$ *, está dado por:*

a) $[-2;8]$
b) $[0;5]$
c) $[2;8]$
d) $[-2;2]$
e) $[1;6]$

28. *La mayor solución de la inecuación*
$|x+2|<2x\leq 10$ *, es:*

a) 4
b) 7
c) 8
d) 5
e) 6

29. *Dada la ecuación:* $2\left|x+\frac{1}{2}\right|^2-7\left|x+\frac{1}{2}\right|=-6$
La suma de soluciones es:

a) -2
b) -1
c) -3/4
d) 3/4
e) -11/4

30. *Si el conjunto solución de la inecuación:* $\left|\dfrac{x-1}{x^2-4x+8}\right| \le \left|\dfrac{1}{x-1}\right|$ *tiene la forma:* $\left\langle -\infty; \dfrac{a}{b}\right] - \{c\}$. *El valor de* $a+b+c$ *es:*

a) 5
b) 10
c) 13
d) 3
e) 0

31. *El número de soluciones enteras que tienen la inecuación* $|x^2+1| \le |x^2-3|$ *es:*

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

32. *Dado el conjunto:*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} / \left||x^2+4| + 4x\right| - \left||x^2+4| - 4x\right| \ge 32 \right\}$$

El conjunto A^c *es:*

a) $[-4;4]$
b) $\langle -\infty;4] \cup [4;+\infty\rangle$
c) $\langle -4;4\rangle$
d) $[-4;4] \cap \mathbb{N}$
e) $\langle -4;4\rangle \cap \mathbb{N}$



10 MATRICES Y DETERMINANTES

MATRICES

DEFINICIÓN.
Es un arreglo de elementos dispuestos en filas y columnas que pueden ser números reales, números complejos, funciones, etc. Para representar a una matriz se utilizan letras mayúsculas: A, B, C, ... y sus elementos de dicha matriz están encerrados entre paréntesis o corchetes.

Ejemplos:

- $A=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 3}$
- $B=\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

ORDEN DE UNA MATRIZ
El orden de una matriz es el producto indicado del número de filas por el número de columnas.

Se denota por: $m\times n$

Ejemplo:

- $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{orden} 2\times 3$

NOTACIÓN GENERAL DE UNA MATRIZ

En general una matriz "A" *de* "m" *filas y* "n" *columnas, es decir de orden* "$m\times n$" *cuyos elementos son* a_{ij} *con* $m,n\in\mathbb{Z}^+$ *se representa por:*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Que abreviadamente se expresa como:

$$A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$$

Donde a_{ij}*, se llama elemento genérico de la matriz* "A".

IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices son iguales si y solamente si son del mismo orden y sus elementos que ocupan la misma posición son respectivamente iguales.

Ejemplo:
Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} (a-5) & 1 \\ 3 & (b-3) \\ 2 & (2c) \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Si son iguales, se tiene:

$$2 = a - 5 \longrightarrow a = 7$$

$$0 = b - 3 \longrightarrow b = 3$$

$$10 = 2c \longrightarrow c = 5$$

TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

1) <u>Matriz Fila</u>

Es aquella matriz formada por una sola fila y es de orden $1 \times n$.

$$A = \left[a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n} \right]_{1\times n}$$

O también.

$$A = \left[a_{1j} \right]_{1\times n}$$

Ejemplo:

- $A = \left[2 \quad -8 \quad 0 \right]_{1\times 3}$
- $B = \left[2 \quad -1 \quad 0 \quad 5 \right]_{1\times 4}$

2) <u>Matriz Columna</u>

Es aquella matriz formada por una sola columna y es de orden $m \times 1$*, esto es:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

O también.

$$A = \left[a_{i1} \right]_{m\times 1}$$

Ejemplos:

- $A = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1}$
- $B = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ -3 \\ 20 \end{bmatrix}_{4\times1}$

3) *Matriz Rectangular*

Son aquellas matrices cuyo número de filas es distinto al número de columnas, es decir: $m \neq n$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 54 \\ 8 & 5 & -6 & -45 \end{bmatrix}_{2\times4}$$

4) *Matriz Nula*

Es aquella matriz rectangular o cuadrada donde todos sus elementos son nulos, se denota por: "$\mathbf{O}$".

Ejemplo:

- $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times2}$
- $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$

5) *Matriz Cuadrada*

Esta matriz se caracteriza por tener el mismo número de filas que de columnas "$m = n$". *Esta se representa por:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Diagonal secundaria

Diagonal principal

Ejemplo:

- $C = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 3 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$

TRAZA DE UNA MATRIZ CUADRADA

La traza de una matriz cuadrada, representada por $tr(A)$ *, viene dada por la suma de los elementos de la diagonal principal. Esto es:*

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{m\times n} \longrightarrow Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

PROPIEDADES DE LA TRAZA

Sean las matrices cuadradas: $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ *y* $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ *luego se tiene que:*

1. $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$
2. $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$, *donde* $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $Tr(AB) = Tr(BA)$

6) Matriz Diagonal

Es una matriz cuadrada, donde todos sus elementos fuera de la diagonal principal son nulos.

$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *es una matriz diagonal si y solamente si* $a_{ij} = 0 \,;\forall i \neq j \;\wedge\; a_{ij} \neq 0;\exists\, i = j$

Ejemplo:

- $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$
- $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

7) Matriz Escalar

Es una matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a una constante diferente de cero.

$E = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *es una matriz escalar si y solamente si* $a_{ij} = 0;\forall i \neq j \wedge a_{ij} = c\,;\forall i = j$ *con* $c \neq 0$

Ejemplo:

- $E = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3}$

8) Matriz Identidad

Es una matriz escalar donde los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad.

$I = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *es una matriz identidad si y solamente sí* $a_{ij} = 0; \forall i \neq j \wedge a_{ij} = 1; \forall i = j$.

Ejemplo:

- $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times4}$

9) Matriz triangular superior

Son matrices cuadradas cuyos elementos que se encuentran por debajo de la diagonal principal son todos nulos. Esto es:

$S = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *es una matriz triangular superior, sí* $a_{ij} = 0; \forall i > j$.

Ejemplo:

- $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$

10) Matriz triangular inferior

Son matrices cuadradas cuyos elementos que se encuentran por encima de la diagonal principal son todos nulos. Esto es:

$F = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ *es una matriz triangular inferior, sí* $a_{ij} = 0; \forall i < j$.

Ejemplo:

- $F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & -9 & 0 \\ 10 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$

OPERACIONES CON MATRICES

ADICIÓN DE MATRICES

Consideremos las matrices $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *y* $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ *del mismo orden, luego la suma de matrices viene dada por:*

$$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$$

Ejemplo:

Consideremos las matrices

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 6 & 7\end{bmatrix}_{2\times 3} \; y \; B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 9\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Luego tenemos que:

$$A+B=\begin{bmatrix}2+4 & 3+1 & -1+0\\ 0+1 & 6+3 & 7+9\end{bmatrix}_{2\times 3}=\begin{bmatrix}6 & 4 & -1\\ 1 & 9 & 16\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

PROPIEDADES:

Sean las matrices: $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ *y* $C=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ *matrices del mismo orden, luego se tiene que:*

1. $A+\left(B+C\right)=(A+B)+C$
2. $A+B=B+A$
3. $A+\mathbf{O}=\mathbf{O}+A=A$ *donde* "$\mathbf{O}$" *es la matriz nula de orden* $m\times n$.
4. $A+(-A)=(-A)+A=\mathbf{O}$, *donde* "$-A$" *es la matriz opuesta de* A

MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Sea la matriz $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *de orden* $m\times n$ *y* $\alpha\in\mathbb{R}$, *definimos el producto de una matriz por un escalar como:*

$$\alpha A=\left[\alpha . a_{ij}\right]_{m\times n}$$

Ejemplo:

Dada la matriz

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & -11\\ -5 & 6\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

luego tenemos que:

$$5A=\begin{bmatrix}5(1) & 5(0)\\ 5(16) & 5(-11)\\ 5(-5) & 5(6)\end{bmatrix}_{3\times 2}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 80 & -55\\ -25 & 30\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

PROPIEDADES:

Sea la matriz: $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *y* $\alpha;\beta\in\mathbb{R}$

1. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
2. $\alpha(\beta A)=\beta(\alpha A)$
3. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
4. $1A=A$ *; donde* "$1\in\mathbb{R}$".

MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ FILA CON UNA MATRIZ COLUMNA.

Dada la matriz fila $A=\left[a_j\right]_{1\times n}$ *y la matriz columna* $B=\left[b_i\right]_{n\times 1}$ *, el producto de estas matrices viene dado por:*

$AB=\left[c\right]_{1\times 1}$ *donde:*

$$c=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

Ejemplo: *Consideremos las matrices:*

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 3 & 1\end{bmatrix}_{1\times 4}\ y\ B=\begin{bmatrix}6\\0\\9\\-4\end{bmatrix}_{4\times 1}$$ *entonces se tiene:*

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 5 & 3 & 1\end{bmatrix}_{1\times 4}\cdot\begin{bmatrix}6\\0\\9\\-4\end{bmatrix}_{4\times 1}=\left[2(6)+5(0)+3(9)+1(-4)\right]_{1\times 1}=\left[40\right]_{1\times 1}$$

MULTIPLICACIÓN DE DOS MATRICES

Consideremos las matrices $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *y* $B=\left[b_{jk}\right]_{n\times p}$ *, donde el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz, luego el producto de matrices viene dado por:*

$$A.B=\left[c_{ik}\right]_{m\times p}\ \text{donde: } c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$$

Es decir:

El elemento "c_{ik}" *que ocupa la* i *- ésima fila y la* k *- ésima columna en la matriz* $A.B$ *, se obtiene como el producto de la* i *- ésima fila de la matriz* "A" *con la* k *- ésima columna de la matriz* "B".

Ejemplo: *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Luego la matriz AB viene dado por:

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Donde:

- $c_{11} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 9(5)+(-3)(-3)+(5)(4)$
  $c_{11} = 64$
- $c_{12} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 9(0)+(-3)(6)+(5)(1)$
  $c_{12} = -13$
- $c_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2(5)+0(-3)+1(4)$
  $c_{21} = 14$
- $c_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(0)+0(6)+1(1)$
  $c_{22} = 1$
- $c_{31} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 4(5)+2(-3)+(-1)(4)$
  $c_{31} = 10$
- $c_{32} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 4(0)+2(6)+(-1)(1)$
  $c_{32} = 11$

Luego tenemos que:

$$AB = \begin{bmatrix} 64 & -13 \\ 14 & 1 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

PROPIEDADES:

1. *Sean las matrices:* $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$; $B=\left[b_{jk}\right]_{n\times p}$ *y* $C=\left[c_{kl}\right]_{p\times q}$ *luego se tiene que:* $A(BC)=(AB)C$
2. *Sea la matriz:* $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$; $B=\left[b_{jk}\right]_{n\times p}$ *y* $C=\left[c_{jk}\right]_{n\times p}$ *luego se tiene* $A(B+C)=AB+AC$
3. $A.\mathbf{O}=\mathbf{O}$
4. *Si* $AB=AC \nRightarrow B=C$.
5. *Si* $AB=\mathbf{O}$ *, entonces no necesariamente se tiene que:* $A=\mathbf{O} \vee B=\mathbf{O}$.
6. *En general no siempre se cumple que:* $AB=BA$.
7. *Cuando se cumple* $AB=BA$*, decimos que las matrices son conmutables.*

RELACIONES ENTRE MATRICES

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

Consideremos la matriz $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *de orden* $m\times n$*. La matriz transpuesta de* "A" *es otra matriz, denotada por* "A^T" *, que se obtiene intercambiando las filas por columnas de la matriz* "A" *y es de orden* $n\times m$*. Esto es:*

$$A^T=\left[a_{ji}\right]_{n\times m}$$

Ejemplo: *Dada la matriz*

$$H=\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 2} \Rightarrow H^T=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 7 & -5 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

PROPIEDADES:

Sea la matriz: $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *luego tenemos que:*

1. $(A+B)^T=A^T+B^T$
2. $(\alpha A)^T=\alpha A^T$
3. $(AB)^T=B^T A^T$
4. $(A^T)^T=A$

MATRIZ SIMÉTRICA

Sea la matriz $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ *una matriz cuadrada, se dice que* $"A"$ *es una matriz simétrica cuando esta es igual a su transpuesta. Es decir:*

$$"A" \text{ es simétrica } \Leftrightarrow A=A^T$$

Ejemplo: *Consideremos la matriz:*

$$S=\begin{bmatrix}2 & 0 & 4\\0 & 1 & -7\\4 & -7 & 9\end{bmatrix}_{3\times 3} \quad \textit{Tomemos su transpuesta} \quad S^T=\begin{bmatrix}2 & 0 & 4\\0 & 1 & -7\\4 & -7 & 9\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Como $S=S^T$*, entonces la matriz* $"S"$ *es simétrica.*

MATRIZ ANTISIMÉTRICA

La matriz cuadrada $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *se dice que es Antisimétrica cuando es igual al opuesto de su transpuesta. Esto es:*

$$"A" \text{ es antisimétrica } \Leftrightarrow A=-A^T$$

Ejemplo: *Sea la matriz*

$$M=\begin{bmatrix}0 & 5 & -1\\-5 & 0 & -9\\1 & 9 & 0\end{bmatrix}_{3\times 3} \quad \textit{Tomemos su transpuesta} \quad M^T=\begin{bmatrix}0 & -5 & 1\\5 & 0 & 9\\-1 & -9 & 0\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Luego se cumple que $M=-M^T$*, entonces la matriz* $"M"$ *es antisimétrica.*

EJERCICIOS

1. *La suma de los elementos de la matriz:*
$A=\left[a_{ij}\right]_{3\times2} / a_{ij}=i+3j$, *es:*

a) 39
b) 25
c) 38
d) 21
e) 32

2. *Si* $B=\left[b_{ij}\right]_{4\times3}$ *donde* $b_{ij}=\begin{cases}2 & ;i=j\\ -1 & ;i\neq j\end{cases}$, *entonces la suma de los elementos de* B *es:*

a) 1
b) −1
c) 3
d) −3
e) 4

3. *Consideremos la matriz diagonal siguiente:*

$$D=\begin{bmatrix} a-8 & p-b & m-a \\ a-5 & b+9 & n-b \\ 5-a & b-2 & -2c+5 \end{bmatrix}$$

El valor de $M=m-n+p$ *es:*

a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

4. *Dada la siguiente matriz identidad:*

$$\begin{bmatrix} a & m-1 & n-2 \\ q+1 & b & p-3 \\ r+2 & s+3 & c \end{bmatrix}$$

El valor de $K=abc+mnp+qrs$, *es:*

a) 0
b) 1
c) 35
d) 36
e) 37

5. *Dada la matriz triangular superior:*

$$A=\begin{bmatrix} 7 & b-1 & a+2 \\ a-2 & 6 & d-1 \\ b+3 & d-4 & 7 \end{bmatrix}$$

El valor "$a+b-d$", *es:*

a) −7
b) 3
c) −5
d) 4
e) −6

6. *Si se tiene que:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ b & c & 5 \end{bmatrix}$$

El valor de $E=a+b+c$, *es:*

a) 2
b) 5
c) 6
d) 7
e) 10

7. *Sean las matrices:* $A=\begin{bmatrix} x-2y & x \\ 3 & x-y \end{bmatrix}$ *y* $B=\begin{bmatrix} 2 & y+4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, *de modo que* $A=B$.

El valor de "$x.y$" *es:*

a) 6
b) 10
c) 8
d) 12
e) 14

8. *Si* $E=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *y* $F=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Entonces la $Traz(E.F)$ *es:*

a) −1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

9. *Si en la matriz:*

$$A=\begin{bmatrix} 2x-3y & 4x \\ 2x+12 & y+6 \end{bmatrix}$$

Se cumple que: $a_{21}=a_{12}$ *y* $Traz(A)=6$.

Entonces el valor de $\frac{x.y}{x+y}$ *es:*

a) 4
b) $\frac{4}{3}$
c) 3
d) 2
e) $\frac{1}{2}$

10. *Sean las matrices:*

$$A=\begin{bmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 6-y \\ 1 & 6-x \end{bmatrix} \quad y$$

$$C=\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si $A=B$ *, entonces la suma de los elementos de la matriz* $3A+2C$ *es:*

a) 13
b) 15
c) 18
d) 25
e) 23

11. *Si:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Entonces el valor de $(x+y+z)$ *es:*

a) 11
b) 13
c) 6
d) 7
e) -4

12. *Se define* $P(x,y)=2x^2-3xy+y^2$ *, además:*

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \; y \; B=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Luego de encontrar $P(A;B)$*, la suma de los elementos de su diagonal principal es:*

a) -33
b) -81
c) 33
d) 81
e) 13

13. *Sea la matriz:*

$$A=\begin{bmatrix} x-2y & x+3y & 2x \\ 3y-x & x+y & 2x-y \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Donde se cumple que $Traz(A)=16$ *y* $a_{21}+a_{31}=a_{22}+1$. *El valor "x.y" es:*

a) 6
b) 4
c) 5
d) 3
e) 7

14. *Se define la matriz,* $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$ *como:*

$$a_{ij}=\begin{cases} 2i-j \; ; i\le j \\ i+2j \; ; i>j \end{cases}$$

Y la matriz $B=\left[b_{ij}\right]_{3\times 4}$*, como:* $b_{ij}=i+j-1$.

Sea $C=AB$. *El valor de* c_{23} *es:*

a) 11
b) 18
c) 25
d) 32
e) 43

15. *Dada la ecuación matricial* $(A^T+B)^T+2A-X=0$ *, donde* $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ *y* $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. *El mayor de los elementos de la matriz* X *, es:*

a) 5
b) 7
c) 9
d) 11
e) 13

16. *Si "A" es una matriz antisimétrica definida por:*
$$A=\begin{bmatrix} a-b & d & c \\ a & b+1 & -4 \\ e & 4 & c-2 \end{bmatrix}$$
, entonces el valor de $H=a+b+c+d+e$ es:

a) -1
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

17. *Sabiendo que:* $A^2=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B^2=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$,
$AB=\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ *y* $BA=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Luego la $Traz\,(A+B)^2$ *es:*

a) 16
b) 10
c) -16
d) 0
e) 9

18. *Dada las matrices:* $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ *y* $B=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
, y la ecuación matricial $(A-B)^T+X=2(B^T+A)$
. La suma de los elementos de X es:

a) 19
b) 17
c) 15
d) 13
e) 11

19. *Si* $A=\begin{bmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 2 & 3 & a \\ b & x & 3 \end{bmatrix}$ *es una matriz simétrica. La matriz* $H=aA+bA+xA$ *viene dado por:*

a) $3A$
b) $4A$
c) $5A$
d) $6A$
e) $7A$

20. *Indicar con (V) si es verdadero y con (F) si es falso. Sean las matrices A, B y C y consideremos los siguientes enunciados:*

I. *Si A no es nula, entonces A^2 no es nula.*
II. *Si B es una matriz simétrica entonces se cumple:* $\left(B+B^T\right)=2B$.
III. *Si* $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$*, entonces* $C^6=I_2$

La secuencia correcta es:

a) VVF
b) FVV
c) VFV
d) FFV
e) VVV

21. *Dada la matriz* $A=\begin{bmatrix} 1 & a-b & -1 \\ 2 & 3 & b \\ b-x & a-x & 4 \end{bmatrix}$ *simétrica.*

Entonces la $Traz(A^2)$ *es:*

a) 36
b) 25
c) 38
d) 40
e) 41

22. *Dada la matriz* $H=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*. La suma de los elementos de* H^{40} *es:*

a) 6^{40}
b) 6^{20}
c) 6^{15}
d) 6^{10}
e) 6^{13}

23. *Dada la ecuación matricial:*
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b \\ b+c \\ c+a \end{bmatrix}$$
, entonces el valor de la expresión: $(x-1)(y-1)(z-1)$ *es:*

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

24. *Se define las matrices:* $A=\begin{bmatrix} x-2y & y-z \\ 2x+2y & 0 \end{bmatrix}$

$B_{2\times 2}=\begin{cases} b_{ij}=i-j & ;i=j \\ b_{ij}=i+j & ;i\neq j \end{cases}$ *y* $C=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

Si $A+B=C$ *, entonces* $T=x+y+z$ *es:*

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

25. *Sean las matrices* $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *y* $B=A+A^2+A^3+...+A^{200}$ *, luego la traza de* B *es:*

a) 200
b) 300
c) 400
d) 500
e) 600

26. *Dado el sistema de matrices:*

$A+B^T-C=I$

$A^T-B+2C^T=3I$

$2A+B+C=5I$

La matriz B *viene dado por:*

a) I
b) $2I$
c) $-I$
d) $3I$
e) $\frac{1}{2}I$

27. *Dado el polinomio* $P(x)=x^2-mx+n$ *con la condición* $P(A)=0$*, donde* $A=\begin{bmatrix} \pi & 1 \\ 0 & e \end{bmatrix}$*; Luego el valor de* $P(e)-P(\pi)+24$ *es:*

a) 12
b) 13
c) 24
d) 26
e) 0

28. *Dada la matriz* $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ *y sea "*S*" una matriz triangular inferior tal que se cumple* $A=S.S^T$*, la traza de la matriz "*S*" es:*

a) $2+\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{3}$
c) $2\left(1+\sqrt{3}\right)$
d) 16
e) 4

DETERMINANTES

DEFINICIÓN

El determinante de la matriz cuadrada A, *denotada por* $|A|$, *es una función que hace corresponder a la matriz* $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ *un único número.*

$$\det(A)=|A|$$

CÁLCULO DE DETERMINANTES

a. *Determinante de una matriz de orden 1*

Sea la matriz $A=[a]_{1\times1}$ *de orden* 1, *luego se tiene la determinante para esta matriz como:*

$$\det(A)=|A|=a$$

Ejemplo:

- $A=[5] \longrightarrow |A|=5$
- $B=[-7] \longrightarrow |B|=-7$

b. *Determinante de una matriz de orden 2*

Consideremos una matriz $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times2}$ *de orden* 2, *para calcular su determinante usaremos la formula:*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Producto (−)   Producto (+)

$$|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Ejemplo:

- $M=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |M|=\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$

Producto (−)   Producto (+)

$$\Rightarrow |M|=(5)(4)-(6)(-2)$$
$$|M|=32$$

c. _Determinante de una matriz de orden 3_

Sea la matriz cuadrada $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$*, para calcular su determinante usaremos la regla de SARRUS. Esto es:*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ *luego tenemos que:* $$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Producto (–)   Producto (+)

$$|A|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$$

OBSERVACIÓN:
La regla de Sarrus solo es aplicable para calcular determinantes de matrices hasta de orden 3, para matrices de orden mayor a 3 se puede usar el método de Laplace o método de los cofactores.

Ejemplo:

- $M=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 9 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *su determinante viene dado por* $|M|=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 9 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 9 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

Producto (–)   Producto (+)

$$|M|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$$
$$|M|=(5)(4)(1)+(9)(3)(-1)+(0)(2)(4)-(-1)(4)(0)-(4)(3)(5)-(1)(2)(9)=-85$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Sean las matrices: $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ *y* $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$

1. $|I|=1 \quad \wedge \quad |\mathbf{O}|=0$
2. $|A+B|\neq|A|+|B|$
3. $|A^T|=|A|$
4. $|AB|=|A|.|B|$
5. $|A^n|=|A|^n\ ;\forall n\in\mathbb{N}$
6. $|\alpha A|=\alpha^n|A|;\forall\alpha\in\mathbb{R}$ *donde "n" es el orden de la matriz A.*

7. *Si dos filas o dos columnas de la matriz "A" son proporcionales, entonces $|A| = 0$.*

8. *La determinante de las matrices diagonales, triangulares y escalares, se calcula multiplicando los elementos de la diagonal principal.*

9. *Si los elementos de la diagonal principal son todos nulos, entonces la determinante de la matriz será cero.*

10. *Si todos los elementos de una fila o columna son todos nulos, entonces el determinante de la matriz será cero.*

11. *Cuando se intercambian dos filas o dos columnas consecutivas, entonces el determinante de la matriz cambia de signo.*

12. *Si a los elementos de una fila o columna se le multiplica por un escalar $\alpha \in \Re$, entonces la determinante de la matriz queda multiplicada por este escalar*

DEFINICIÓN.

Consideremos una matriz $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ de orden "n", decimos que "A" es una matriz singular si su determinante es cero.

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n} \text{ es singular } \Leftrightarrow |A| = 0$$

o también:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n} \text{ es no singular } \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

MATRIZ DE COFACTORES Y MATRIZ ADJUNTA

Sea la matriz cuadrada $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ de orden "n". Esto es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

i-ésima fila

i-ésima columna

i. Menor complementario de un elemento

Consideremos el elemento $"a_{ij}"$ *que ocupa la i-ésima fila y la j-ésima columna de la matriz* $"A"$. *Denominamos menor del elemento* $"a_{ij}"$, *denotado por* $"M_{ij}"$, *al determinante de la matriz de orden* $"n-1"$ *que se obtiene luego de suprimir la i-ésima fila y la j-ésima columna de la matriz* $"A"$. *Esto es:*

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo: *Consideremos la matriz:*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

3ra fila

2da columna

Luego tenemos que los menores de los elementos $"a_{32}"$ *y* $"a_{22}"$ *son:*

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \quad y \quad M_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{32} = 2 \qquad M_{22} = 1$$

ii. Cofactor de un elemento:

El cofactor del elemento $"a_{ij}"$ *(elemento que ocupa la i-ésima fila y la j-ésima columna de la matriz* A*), que se denota por* $"C_{ij}"$, *y se define como:*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Ejemplo:

Sea la matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Los cofactores de los elementos $a_{12} = 3$ *y* $a_{33} = 1$ *son:*

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -1(-16) = 32$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1(14) = 14$$

iii. MATRIZ DE COFACTORES

Definimos la matriz de cofactores de A, denotado por $cofac(A)$, a la matriz cuyos elementos son todos los cofactores de los elementos de la matriz A. Esto es:

$cofac(A)=\left[C_{ij}\right]_{n\times n}$; donde C_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij}.

***Ejemplo:** Sea la matriz:*

$$E=\begin{bmatrix}5 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

Determinemos la matriz de cofactores.

$$cofact(E)=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}$$

Usemos la fórmula para determinar los cofactores de los elementos de E.

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

- $C_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7$
- $C_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2$
- $C_{13}=(-1)^{1+3}M_{11}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-8$
- $C_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=5$
- $C_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3$
- $C_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}5 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-19$
- $C_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-2$
- $C_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=5$
- $C_{33}=(-1)^{3+3}M_{3+3}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5 & -2\\ 0 & 4\end{vmatrix}=20$

Luego tenemos que:

$$cofact(E)=\begin{bmatrix}7 & -2 & -8\\ 5 & 3 & -19\\ -2 & 5 & 20\end{bmatrix}$$

TEOREMA DE LAPLACE

Sea la matriz cuadrada $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ *de orden* "n", *entonces el determinante de* "A" *viene dado por:*

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}C_{1k}$$

iv. MATRIZ ADJUNTA

Definimos la matriz adjunta de A *como la transpuesta de la matriz de cofactores de* A *y la denotamos por* $Adj(A)$.

$$Adj(A) = Cofac(A)^T$$

Ejemplo: *Determinemos la adjunta para la matriz del ejemplo anterior.*

$$E = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ entonces se tiene: } cofact(E) = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -8 \\ 5 & 3 & -19 \\ -2 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

$$Adj(E) = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -8 \\ 5 & 3 & -19 \\ -2 & 5 & 20 \end{bmatrix}^T$$

$$Adj(E) = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \\ -8 & -19 & 20 \end{bmatrix}$$

INVERSA DE UNA MATRIZ

Sea la matriz cuadrada $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ *de orden* "n", *se dice que la matriz* $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ *es la inversa de la matriz* "A", *cuando* $AB = BA = I$. *Esto es:*

"B" es inversa de "A" $\Leftrightarrow$ $AB = BA = I$.

OBSERVACIÓN:

- ✓ *La inversa de una matriz no siempre existe.*
- ✓ *Si la matriz* $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ *de orden* "n" *posee inversa* B, *entonces dicha inversa será representada por* $A^{-1} = B$

TEOREMA

Sea la matriz cuadrada $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ *de orden* "n". *Luego se tiene:*

"A" *posee inversa* $\Leftrightarrow$ "A" *es no singular*

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

Consideremos la matriz cuadrada ***no singular*** $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ *de orden* "n", *la inversa de* "A" *viene dado por:*

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)$$

Ejemplo:

Consideremos la matriz del ejemplo anterior:

$$E=\begin{bmatrix}5 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

su determinante viene dado por:

$$|E|=\begin{vmatrix}\overset{+}{5} & \overset{-}{-2} & \overset{+}{1}\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=5(7)+2(2)+1(-8)=31$$

$$|E|=31$$

Luego su matriz adjunta según el ejemplo anterior es:

$$Adj(E)=\begin{bmatrix}7 & 5 & -2\\ -2 & 3 & 5\\ -8 & -19 & 20\end{bmatrix}$$

La matriz inversa viene dada por:

$$E^{-1}=\frac{1}{|E|}Adj(E)=\frac{1}{31}\begin{bmatrix}7 & 5 & -2\\ -2 & 3 & 5\\ -8 & -19 & 20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{31} & \frac{5}{31} & -\frac{2}{31}\\ -\frac{2}{31} & \frac{3}{31} & \frac{5}{31}\\ -\frac{8}{31} & -\frac{19}{31} & \frac{20}{31}\end{bmatrix}$$

PROPIEDADES DE LA MATRIZ INVERSA

Sean las matrices cuadradas no singulares (INVERTIBLES) $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ *y* $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ *de orden* "n". *Luego se tiene que:*

1. $I^{-1}=I \quad I^{-1}=I$
2. *La matriz* "AB" *es invertible y se cumple:* $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
3. *La matriz* A^{-1} *es invertible y además* $(A^{-1})^{-1}=A$
4. $(\alpha A)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1};\forall\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$
5. *La matriz* A^{m} *es invertible y se tiene:* $(A^{m})^{-1}=(A^{-1})^{m}$
6. $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$

OBSERVACIÓN:

Dada la matriz cuadrada no singular $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *de orden 2, su inversa viene dada por:*

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS

1. *El determinante de la matriz:*

$$H=\begin{bmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{bmatrix};\ n\in\mathbb{N}$$ *, es:*

a) 1
b) -1
c) n
d) $-n$
e) n^2

2. *El determinante de la siguiente matriz:*

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$ *, es:*

a) 7
b) 17
c) 27
d) 37
e) 47

3. *El valor* "x" *en* $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & x \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}=9$*, es:*

a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

4. *La matriz* $\begin{bmatrix} 2+x & x \\ x & 3 \end{bmatrix}$*, tiene por determinante, al número* $(x+b)$*. El valor de* "b"*, de tal manera que dicho número sea único, es:*

a) 10
b) 7
c) x
d) 17
e) 4

5. *Consideremos la matriz* $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 3}$ *donde:*

$$a_{ij}=\begin{cases} 2i+j\ ; i<j \\ ij\ \ \ \ ; i\geq j \end{cases}$$ *. El valor de* $\left|AA^T\right|$ *es:*

a) 82
b) 84
c) 86
d) 89
e) 92

6. *Si se tiene que* $\Delta_n^m=\begin{vmatrix} m\sqrt{2} & 2 \\ 3 & n\sqrt{3} \end{vmatrix}$ *y además*

$\Delta_2^1+\Delta_3^2+\Delta_4^3+2\Delta_1^0=k\Delta_1^4$*. El valor de* "$k$" *es:*

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

7. *Si* "A" *es una matriz cuadrada de orden* 4 *y* $|A|=\sqrt[50]{2}$ *. El valor de* $H=\left\|A^2\right|A^T\left|\right|A|$ *es:*

a) 1
b) 2
c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt[3]{2}$
e) $\sqrt[5]{2}$

8. *Se define la función:*

$$f(x;y;z)=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 4 & y & 0 \\ 8 & 9 & z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & y & 5 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}$$

La suma de cifras de $f(4;8;16)$ *es:*

a) 10
b) 15
c) 4
d) 20
e) 17

9. *La solución de la ecuación:*

$$\begin{vmatrix} x-1 & x & x \\ x & x+2 & x \\ x & x & x+3 \end{vmatrix} = 0 \text{, es:}$$

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

10. *Dada la matriz singular:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ \beta & \beta+2 & \beta-2 \\ 4 & \beta & 8 \end{bmatrix}$$

Los valores de "β" son:

a) $\left\{-\frac{4}{3};3\right\}$
b) $\left\{-3;\frac{4}{3}\right\}$
c) $\left\{-\frac{3}{4};4\right\}$
d) $\left\{-4;-\frac{3}{2}\right\}$
e) $\left\{-\frac{1}{3};-4\right\}$

11. *Dada la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La traza de la matriz inversa de "A" es:

a) -1
b) 0
c) 1
d) 2
e) 3

12. *Si se tiene que:*

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & -1 \\ x-1 & x & 1 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 8$$

El valor de "x" es:

a) 4
b) 9
c) 12
d) 16
e) 25

13. *Considere la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & k \\ 1 & k & 4 \\ 1 & k & k \end{bmatrix}$$

El conjunto de valores de "k" para que la matriz "A" sea invertible, es:

a) $k \in \mathbb{R} - \{0\}$
b) $k \in \mathbb{R}$
c) $k \in \mathbb{R} - \{4\}$
d) $k \in \{-4\}$
e) $k \in \{0\}$

14. *Sea la ecuación matricial:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Donde X es una matriz cuadrada de orden 2. La traza de la matriz X es:

a) 1
b) 5
c) 8
d) 10
e) 15

15. *Si A es una matriz cuadrada no singular de orden "n", indique el valor de verdad de cada una de las proposiciones.*

I. $A^T.A$ *es una matriz simétrica.*
II. $|m.Adj(A)| = m|A|^{n-1}$
III. $(A^T.A)^{-1}.A^T = A^{-1}$

a) VFF
b) VVF
c) VFV
d) VVV
e) FVF

16. *La traza de "A", tal que esta cumple con la ecuación* $2A = |A|\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$*, es:*

a) 8
b) 6
c) 14
d) 20
e) 25

17. La traza de la matriz X tal que se cumple la igualdad $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, es:

a) 26
b) 27
c) 28
d) 29
e) 30

18. Consideremos las matrices cuadradas no singulares A y B de orden "n". Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $(\beta A)^T = \beta A^T ; \forall \beta \in \mathbb{R}^-$
II. Si $|\alpha A| = \alpha^n |A| ; \forall n \in \mathbb{N}$
III. $(AB)^T = B^T A^T$
IV. $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$

a) VVVV
b) $VVVF$
c) $VVFV$
d) $VVFF$
e) $VFVV$

19. La traza de la matriz inversa de

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ es:}$$

a) 8
b) 15
c) 21
d) −5
e) 10

20. Si B es una matriz de orden 5 tal que:

$$\left(\left|B^{-3}\right|+1\right)\left(\left|B^{-1}\right|^3+2\right)=42$$

Y además se tiene:
$(1-k)\left|B^T\right|+8\left|B^2\right|=-15$ con $|B| \in \mathbb{Q}$
El valor de "k" es:

a) −33
b) −35
c) −39
d) −41
e) −43

21. Dadas las matrices cuadradas no singulares A y B de orden "n".

I. Si A y B conmutan, entonces A y B^{-1} conmutan.
II. Si A y B conmutan, entonces A^{-1} y B^{-1} conmutan.
III. Si $M = A^{-1}BA$, entonces $M^m = A^{-1}B^{2m}A$

Las proposiciones correctas son:

a) I
b) II
c) III
d) $I \wedge III$
e) $I \wedge II$

22. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{bmatrix}$$

Si se cumple que $\det(A) = \det(B)$, el número de valores que toma la variable "x" es:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

23. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

La suma de elemento de A^{-1} es:

a) −3
b) −4
c) −5
d) −6
e) 1

24. *Sea la matriz:*

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

Si $Q=Adj(P)$*, el valor de* $q_{12}+q_{13}+q_{21}$ *es:*

a) 0
b) 3
c) −2
d) −5
e) 7

25. *Si se cumple que:*

$$\begin{vmatrix}a+dx & a-dx & p\\ b+ex & b-ex & q\\ c+fx & c-fx & r\end{vmatrix}=n\begin{vmatrix}a & d & p\\ b & e & q\\ c & f & r\end{vmatrix}$$

El valor de "n" es:

a) 0
b) 2
c) −2
d) $-2x$
e) $\dfrac{x}{2}$

26. *El valor del determinante:*

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+c\end{vmatrix}$$ *es:*

a) $a+b+c$
b) abc
c) ab
d) $a^2b^2c^2$
e) 1

27. *Siendo "n_0" una solución no racional de la ecuación:*

$$n^4-3n^2+2=\begin{vmatrix}n+1 & n+2 & n+3 & n+4\\ n+2 & n+3 & n+4 & n+5\\ n+3 & n+4 & n+5 & n+6\\ n+4 & n+5 & n+6 & n+7\end{vmatrix}$$

El valor de: $E=\dfrac{n_0}{\left(1+\dfrac{2}{n_0}\right)\left(1-\dfrac{1}{n_0}\right)}$ *es:*

a) 1
b) −1
c) 2
d) −2
e) $\sqrt{2}$



ÁLGEBRA

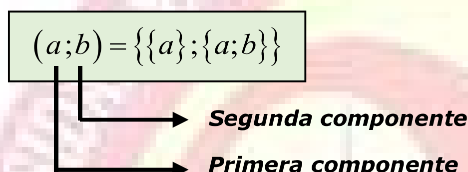
$f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ $\quad \operatorname{Ln} x \quad f(x)=ax^2+bx+c \quad \sqrt{x}$

11 RELACIONES BINARIAS Y REALES

PAR ORDENADO

DEFINICIÓN.

Un par ordenado denotado por $(a;b)$*, es un conjunto cuyos elementos son* $\{a\}$ *y* $\{a;b\}$*. Esto es:*



PROPIEDADES:

Igualdad de pares ordenados

$$(a;b)=(c;d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$$

PRODUCTO CARTESIANO

DEFINICIÓN.

Sean los conjuntos A *y* B*, definimos el producto cartesiano, denotado por* $A\times B$*, al conjunto formado por todos los pares ordenados, de modo que la primera componente se elemento de* A *y la segunda componente elemento de* B*. Es decir:*

$$A\times B=\{(a;b)/a\in A \wedge b\in B\}$$

Ejemplo:

Dado los conjuntos:

$A=\{1;2;3\}$

$B=\{a;b\}$

Tenemos el producto cartesiano:

$$A\times B=\{(1;a);(1;b);(2;a);(2;b);(3;a);(3;b)\}$$

OBSERVACIONES:

1. *El producto cartesiano* $A\times A$ *se denotará por* A^2.

2. *El producto cartesiano no goza de la propiedad conmutativa, esto es:* $A\times B\neq B\times A$.

3. $A\times B=B\times A \Leftrightarrow A=B$

4. $n(A\times B)=n(A).n(B)$

5. $A\times B=\phi \Leftrightarrow A=\phi \vee B=\phi$

RELACIONES BINARIAS:

DEFINICIÓN.

Sean A y B dos conjuntos diferentes del vacío, decimos que R es una relación binaria, cuando es un subconjunto de $A\times B$. Esto es:

$$R \text{ Es una relación de } A \text{ en } B \Leftrightarrow R \subset A\times B$$

OBSERVACIÓN:

Toda relación binaria de A en B será denotada por: $R: A \to B$

Ejemplo:

Dado los conjuntos:

$A=\{1;2;3\}$

$B=\{a;b\}$

Y definimos los conjuntos.

$R_1=\{(1;b);(2;b);(3;b)\}$

$R_2=\{(1;a)\}$

$R_3=\{(1;a);(1;b);(2;a);(2;b);(3;a);(3;b)\}$

Son relaciones, pues los tres son subconjuntos de $A\times B$.

DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACION:

Sean A y B dos conjuntos diferentes del vacío y R una relación de A en B $(R: A\to B)$.

A) Dominio de una relación:

El dominio de la relación $R: A\to B$ se define como el conjunto de las primeras componentes de los pares ordenados que pertenecen a la relación R. El Dominio de la relación "R" representaremos por "$Dom\,R$", luego tenemos que:

$$Dom\,R=\{a\in A/(a;b)\in R\}\subset A$$

B) Rango de una relación:

Definimos el rango de la relación $R: A\to B$ como el conjunto de las segundas componentes de los pares ordenados que pertenecen a la relación R, denotaremos el rango de la relación "R" por "$Ran\,R$". Luego tenemos que:

$$Ran\,R=\{b\in B/(a;b)\in R\}\subset B$$

Ejemplo:

Dado los conjuntos:

$A=\{1;2;3\}$

$B=\{a;b\}$

Y consideremos la relación:

$R_1=\{(1;b);(2;b);(3;b)\}$

Luego tenemos que:

$Dom(R_1)=\{1;2;3\}$

$Ran(R_1)=\{b\}$

RELACIONES BINARIAS DE $\mathbb{R}$ EN $\mathbb{R}$:

Diremos que $R: A \to B$ *es una relación de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$, *cuando* $A = B = \mathbb{R}$. *Además, tenemos que* $Dom(R) \subset \mathbb{R} \wedge Ran(R) \subset \mathbb{R}$.

Las relaciones de $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *están definidas mediante una expresión matemática* $E(x;y)$ *que puede ser una ecuación o inecuación, esto es:*

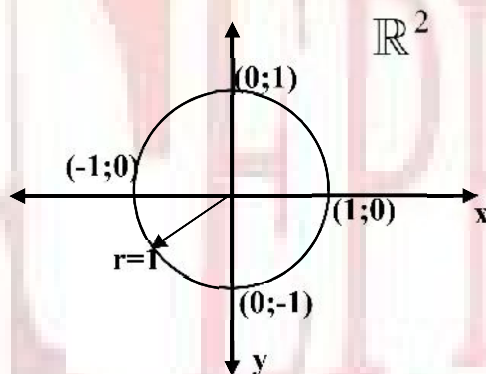
$$R = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, E(x;y)\}$$

Ejemplo:

Consideremos el conjunto

$R = \{(x;y) \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$

Esta es una relación, dado que es un subconjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *la representación para esta relación es una circunferencia de centro en el origen y radio 1.*



Criterios para determinar el dominio y rango de una relación $R: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1) ***<u>Para el Dominio:</u>***

Despejaremos la variable "y" *en función de variable* "x" *y determinaremos las restricciones para* "x", *de modo que obtengamos* $y \in \mathbb{R}$.

2) ***<u>Para el Rango:</u>***

Despejaremos la variable "x" *en función de variable* "y" *y determinaremos las restricciones para* "y", *de modo que obtengamos* $x \in \mathbb{R}$.

EJERCICIOS

1. *Dada la siguiente igualdad de pares ordenados:* $(2x; y+6)=(x+4;3y)$. *El valor* $"xy"$ *es.*

a) 6
b) 8
c) 10
d) 12
e) 16

2. *Si se tiene la igualdad de pares:*

$(a^2-3a;5)=(4;a+1)$

Entonces $\sqrt{a}$ *es:*

a) 1
b) -1
c) 0
d) 2
e) -2

3. *Si tenemos el conjunto* $A=\{2;3;4;5;6\}$ *y la relación* $"R"$*, donde:*

$R=\{(x;y)\in A\times A / y>x\}$

El $Dom(R)\cap Ran(R)$ *es:*

a) $\{6\}$
b) $\{3;4\}$
c) $\{2;6\}$
d) $\{2;3;4\}$
e) $\{3;4;5\}$

4. *Sean los conjuntos:*

$A=\{1;3;4;5;6\}\ \wedge\ B=\{2;4;6\}$ *y la relación*

$R=\{(a;b)\in A\times B / a+b=7\}$

El número elementos que tiene $"R"$ *es:*

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

5. *Dados los conjuntos:*

$A=\{x\in\mathbb{R} / 3\le x\le 6\}$

$B=\{x\in\mathbb{R} / x\in[-1;4]\}$

El área que determina la gráfica de $A\times B$ *es:*

a) $22\,u^2$
b) $6\,u^2$
c) $15\,u^2$
d) $12\,u^2$
e) $8\,u^2$

6. *Dados los conjuntos:*

$A=\{2;5;7\}$

$B=\{3;4\}$

La suma de los elementos del dominio de la relación $R=\{(x;y)\in A\times B / x+y>8\}$*, es:*

a) 8
b) 19
c) 10
d) 11
e) 12

7. *Sea el conjunto:*

$A=\{1;3;5;7\}$, *definimos la relación*

$R=\{(x;y)\in A\times A / x+y=\overset{o}{3}\}$

El número de elementos tiene R *es:*

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

8. *Sean:*

$A=\{1;2;3;4;5\}$

$R_1=\{(x;y)\in A\times A / x<y\}$

$R_2=\{(x;y)\in A\times A / x+y=6\}$

El $Dom(R_1\cap R_2)$ *es:*

a) $\{1;2\}$
b) $\{1;2;3\}$
c) $\{1;2;3;4\}$
d) $\{2;3\}$
e) $\{3;4\}$

9. *El dominio de la relación:*

$R=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} / x^2+y^2=25\}$

a) $[-5;5]$
b) $\langle -5;5\rangle$
c) $\{-25;25\}$
d) $\mathbb{R}-[-5;5]$
e) $[0;5\rangle$

10. *Dada la relación:*
$S=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / 2y^2=y^2x+x-1\}$
Su dominio es:

a) $[1;2\rangle$
b) $[1;2]$
c) $\mathbb{R}$
d) $\langle -\infty;1]\cup[2;+\infty\rangle$
e) $\langle -\infty;1]\cup\langle 2;+\infty\rangle$

11. *Dada la relación:*
$T=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y^2x-3y^2-1=0\}$
El dominio de T es:

a) $[3;+\infty\rangle$
b) $[1;3]$
c) $\mathbb{R}$
d) $\langle 3;+\infty\rangle$
e) $\langle 2;+\infty\rangle$

12. *El dominio de la relación.*
$R=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} / x^2y^2-4x^2-4y^2=0\}$ *es:*
a) $\langle -\infty;-2\rangle$
b) $\mathbb{R}$
c) $[-2;2]$
d) $\langle -\infty;-2\rangle\cup\langle 2;+\infty\rangle\cup\{0\}$
e) $\langle -2;2\rangle$

13. *El rango de la relación.*
$S=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} / xy-x^2-1=0\}$ *es:*
a) $\langle -\infty;-4\rangle$
b) $\mathbb{R}$
c) $\mathbb{R}-[-2;2]$
d) $\langle -\infty;-2]\cup[2;+\infty\rangle$
e) $\langle -4;4\rangle$

14. *El rango de la siguiente relación:*
$R=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / 9x^2+25y^2-18x-100y-116=0\}$
es:

a) $[-1;5]$
b) $\langle -7;7\rangle$
c) $[2;7\rangle$
d) $[5;+\infty\rangle$
e) $\langle 7;17\rangle$

15. *Dada la siguiente relación:*
$R: x\,y-2y-x=0$
El $Dom(R)\cap Ran(R)$ *es:*

a) $\mathbb{R}$
b) $\{1;2\}$
c) $\mathbb{R}-\{1;2\}$
d) $[1;2]$
e) $\langle 1;2\rangle$

16. *Dada la relación:*
$R: y=\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt{6-3x}$
Que tiene por dominio a $[a;b]$. *El valor de* $4a+2b$ *es:*

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

17. *Sean los conjuntos:*
$A=\{4;6;9\}\ \wedge\ B=\{a;2b;3c\}$
Si $A\times B=B\times A$ *con* a, b *y* c *enteros. El mayor valor de* "$a+b+c$" *es:*

a) 8
b) 13
c) 10
d) 11
e) 14

18. *El rango de la relación:*
$T=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / yx-x^2-1=0\}$ *es:*

a) $\langle -\infty; -2] \cup [2; +\infty\rangle$

b) $[-2; 2]$

c) $\langle -\infty; -2]$

d) $\mathbb{R}$

e) $\Re - [-2; 2]$

19. *El Dominio de la relación:* $R = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x^{2/3} + y^{2/3} = 5^{2/3}\}$ *es:*

a) $\langle -5; 5\rangle$

b) $\mathbb{R}$

c) $[-5; 5]$

d) $\langle -\infty; -5\rangle \cup \langle 5; +\infty\rangle$

e) $\mathbb{R} - \{5\}$

20. *El Rango de la relación:* $R = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = \dfrac{|x-2|}{2-x}\right\}$ *es:*

a) $[-1; 1]$

b) $\mathbb{R} - [-1; 1]$

c) $[-1; 3]$

d) $\{-1; 1\}$

e) $\{-3; 1\}$

21. *Siendo* $R: S \to \mathbb{Z}$ *una relación definida por* $R = \{(x+1; 2x-1) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in \langle -1; 1\rangle\}$. *Su rango es:*

a) $\{0\}$

b) $\{-1; 0\}$

c) $\{-2; -1\}$

d) $\{-2; 0\}$

e) $\{-2; -1; 0\}$

22. *Dado el conjunto* $A = \{3; 5; 7\}$ *se define las siguientes relaciones:*

$R_1 = \{(x; y) \in A \times A \,/\, y < x\}$

$R_2 = \{(x; y) \in A \times A \,/\, y^2 = x\}$

$R_3 = \{(x; y) \in A \times A \,/\, y - x - 2 = 0\}$

El valor de $H = \dfrac{2}{3}\left[\dfrac{n(R_1) - n(R_2)}{n(R_3)}\right]$ *es:*

a) 1
b) -1
c) 2/3
d) 3/2
e) 0

23. *El Dominio de la relación:* $R = \{(x; y) \in \Re \times \Re \,/\, x = -1 + \sqrt{7 + 6y - y^2}\}$ *es:*

a) $[-5; 3]$

b) $\mathbb{R} - [-1; 3]$

c) $[-1; 3]$

d) $\langle -5; 3\rangle$

e) $[-4; 4]$

24. *Sea el conjunto* $B = \{2; 3; 4\}$ *y consideremos las relaciones siguientes:*

$R_1 = \{(x; y) \in A \times A \,/\, y \le x\}$

$R_2 = \{(x; y) \in A \times A \,/\, y = x\}$

El conjunto $[Dom(R_1 \Delta R_2)]^c$ *viene dado por:*

a) $\{2\}$

b) $\{2; 3\}$

c) ϕ

d) $\{2; 3; 4\}$

e) $\{3\}$

25. *Dada la relación* $R: y^2 + |x+2| - 15 = 0$ *tal que su dominio tiene la forma* $[-a; b]$. *El valor de* $\sqrt{2a + 3b + 8}$ *es:*

a) 4
b) 6
c) 9
d) 100
e) 7

26. *Dada la relación:* $R = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x-3| + |y-1| = 3\}$

El $Dom(R) \cap Ran(R)$ *es:*

a) $[0;6]$
b) $[-2;6]$
c) $[0;4]$
d) $\langle 0;6\rangle$
e) $[-2;0]$

27. *El Rango de la relación* $R=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=\dfrac{(x-2)+|x-1|}{|x-2|+(x-1)}\right\}$ *es:*

a) $[-1;1]$
b) $\mathbb{R}-[-1;1]$
c) $\mathbb{R}$
d) $[-10;5]$
e) $[0;4]$

28. *El Dominio de la relación:* $R=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / yx^2-x-4y=0\}$ *es:*

a) $\langle 5;10\rangle$
b) $\mathbb{R}-[0;1]$
c) $\mathbb{R}$
d) $[5;+\infty\rangle$
e) $[0;4]$

29. *El rango de la siguiente relación:* $R: 2xy-4x-\sqrt[4]{y-1}+\sqrt[4]{4-y}=2x$ *es:*

a) $[1;3\rangle\cup\langle 3;4]$
b) $[1;4]$
c) $\langle 1;3\rangle\cup\langle 3;4\rangle$
d) $\langle 1;4\rangle$
e) $[-1;3]\cup\langle 4;5]$



ÁLGEBRA

12 FUNCIONES BINARIAS Y REALES

FUNCIÓN BINARIA (DISCRETA).

Dados los conjuntos $"A"$ *y* $"B"$ *una función binaria* $f: A \to B$ *es una relación binaria que hace corresponder a un elemento* $a \in A$ *un único elemento. Es decir:*

$$f = \{(a;b) \in A \times B / b = f(a)\} \subset A \times B$$

OBSERVACIONES:

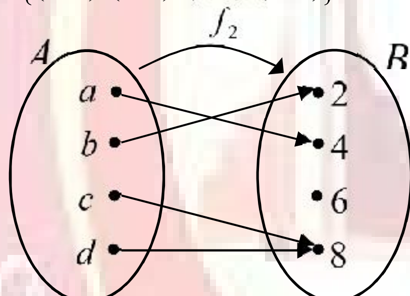
1) $f = \{(a; f(a)) / \forall a \in Dom(f)\}$

2) f *es función, si para* $a \in A$; $\exists! b \in B / b = f(a)$ ***se puede entender como una regla*** *que hace corresponder a un elemento de* A *un único elemento de* B .

REPRESENTACIÓN GRÁFICA: DIAGRAMAS DE VENN - EULER

Ejemplos: *Dadas las siguientes relaciones.*

- $f_2 = \{(a;4);(b;2);(c;8);(d;2)\}$



SI *es una* ***función.***

DOMINIO Y RANGO:

Dada la función binaria $f: A \to B$.

Dominio de una función

$$Dom(f) = \{a \in A / \exists b \in B; (a,b) \in f\} \subseteq A$$

Rango o imagen de una función

$$Ran(f) = \{b \in B / \exists a \in A; (a,b) \in f\} \subseteq B$$

OBSERVACIÓN:

- ✓ *Una función* $f: A \to B$ *es una aplicación si y solamente* $Dom(f) = A$

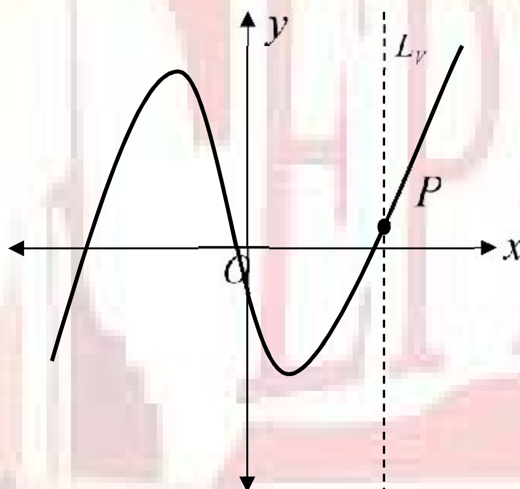
FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Una función real de variable real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una relación real que hace corresponder al elemento* $x \in \mathbb{R}$ *un único elemento* $y \in \mathbb{R}$. *Es decir:*

$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

OBSERVACIÓN:

Las funciones reales $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *son subconjuntos especiales de con la propiedad de que su gráfica se interseca en un único punto con una recta vertical trazada sobre ella.*



DOMINIO Y RANGO

Dada la función real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Dominio de una función

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists y \in \mathbb{R};\, (x, y) \in f\} \subseteq \mathbb{R}$$

Rango o imagen de una función

$$Ran(f) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, \exists x \in \mathbb{R};\, (x, y) \in f\} \subseteq \mathbb{R}$$

EJERCICIOS

1. *El dominio de la función:*

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ *es:*

a) $[-1;1]$
b) $\langle -1;1\rangle$
c) $\langle -\infty;1\rangle \cup \langle 1;+\infty\rangle$
d) $\langle -\infty;-1\rangle \cup \langle 1;+\infty\rangle$
e) $\mathbb{R}-\{1\}$

2. *El dominio de la función* $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{5x}{x^2-9}}$ *, es:*

a) $\left[-\dfrac{17}{4};2\right]$
b) $[0;26]$
c) $\left[0;\dfrac{17}{4}\right]$
d) $\left[-\dfrac{17}{4};2\right\rangle$
e) $\left\langle -2;\dfrac{17}{4}\right]$

3. *Si* f *es una función definida por:*
$f(x)=x^2-5x+2;\ \forall x\in\langle -3;5\rangle$ *, entonces el rango de la función es:*

a) $\left[-\dfrac{17}{4};2\right]$
b) $[0;26]$
c) $\left[0;\dfrac{17}{4}\right]$
d) $\left[-\dfrac{17}{4};2\right\rangle$
e) $\left\langle -2;\dfrac{17}{4}\right]$

4. *La función real* $h=\{(2;6);(0;2n);(3;m);(m;11)\}$ *tiene por regla de correspondencia a* $h(x)=(n-2)x^3+x+2n$ *. El valor de* "$m+n$" *, es:*

a) 3
b) 6
c) 9
d) 10
e) 11

5. *Si:*
$g=\{(8;2);(2;a);(a^2-1;b);(2;2a-3);(3;5)\}$
La suma del mínimo y el máximo valor de la función "g" *es:*

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 4

6. *El rango de la función:* $g(x)=x^2-4x+7\,;x\in[2;3]$ *es:*

a) $[3;4]$
b) $[-5;4]$
c) $[-4;-3]$
d) $[-3;4]$
e) $[-5;-4]$

7. *Dada la función:*
$g=\{(3;5);(6;b);(3;a);(ab;a+b);(6;1)\}$
El valor de $g(5)$ *es:*

a) 3
b) 2
c) 5
d) 7
e) 6

8. *El rango de la función:*

$h(x)=x^2+x+1\ ;\ x<-1$ *es el conjunto:*

a) $\left\langle -\infty;-1\right]$

b) $\langle 1;+\infty\rangle$

c) $\langle 0;+\infty\rangle$

d) $\langle -1;1\rangle$

e) $[-1;1]$

9. *El dominio de la función:*

$h(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{16-x^2}}$ *viene dado por:*

a) $\langle -4;4\rangle$

b) $\langle 1;4\rangle$

c) $\left[1;4\right\rangle$

d) $\left\langle -4;1\right]$

e) $\langle -4;1\rangle$

10. *Dada la función:*

$g=\{(4;2b-1);(2;2a-6);(4;a);(2;a^2-3a);$
$(a;5)\}$

El valor de ab *es:*

a) 15
b) 18
c) 6
d) 20
e) 4

11. *El rango de la función*

$f(x)=\dfrac{5x+7}{x-3}\ ;\ 4<x<5$ *, es*

a) $\langle 16;27\rangle$

b) $\langle -\infty;16\rangle\cup\langle 27;+\infty\rangle$

c) $\left\langle \dfrac{1}{27};\dfrac{1}{16}\right\rangle$

d) $\langle 8;27\rangle$

e) $\langle 17;28\rangle$

12. *Dada la función:*

$f(x)=\sqrt{x^2-9}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-6}}$.

Si su dominio tiene la forma $\left\langle -\infty;-a\right]\cup\left[a;+\infty\right\rangle-\{b\}$ *. El valor de* "ab" *es:*

a) 15
b) 18
c) 12
d) 20
e) 24

13. *Dada las funciones:*

$f(x)=2-\sqrt{x-3}\ ;\ Dom(f)=[3;7]$

$g(x)=|x-1|+2\ ;\ \ Dom(g)=[0;2]$.

La afirmación correcta es:

a) $Dom(f)=Ran(g)$

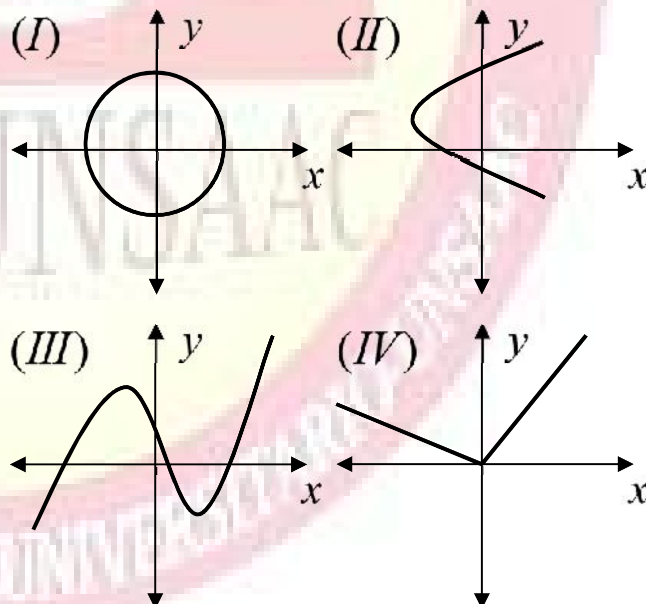
b) $Ran(f)=Dom(g)$

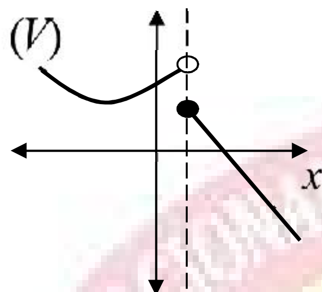
c) $Dom(g)=Ran(g)$

d) $Dom(f)\cap Ran(g)=\varnothing$

e) $Dom(f)=Ran(f)$

14. *¿Cuál de las siguientes graficas representa a una función?*





a) $I \ y \ II$
b) $Solo \ V$
c) $I; II \ y \ III$
d) $III; IV \ y \ V$
e) $solo \ III$

15. *En la función "h" real de variable real cuya regla de correspondencia es:*

$h(x)=\sqrt{64-x^2}+1$

Determine $Dom(h)\cap Ran(h)$.

a) $[1;8]$
b) $[0;9]$
c) $[1;9]$
d) $[1;7]$
e) $[1;9\rangle$

16. *Dadas las funciones "f" y "g" cuyas reglas de correspondencias son:*

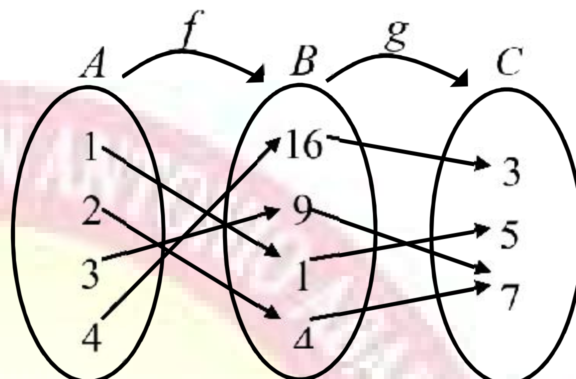
$f(x)=-3(x-1)^2+6$

$g(x)=2(x-1)^2-3$

Señale $Ran(f)\cap Ran(g)$.

a) $[-2;6]$
b) $[-3;6]$
c) $[-6;+\infty\rangle$
d) $\langle-\infty;-3\rangle$
e) $\langle-3;6\rangle$

17. *Si "f" y "g" son funciones tal que:*



El valor de "c" en la siguiente igualdad.

$g(f(1)+g(16))-g(c)=\dfrac{f(3)}{g(16)}+f(1)$, *es:*

a) 16
b) 9
c) 3
d) 1
e) 7

18. *Dada la función "G" definida por:*

$G(x)=x+|x|$; *luego* $Dom(G)\cap Ran(G)$, *es:*

a) $\mathbb{R}$
b) $[0;+\infty\rangle$
c) $\langle-\infty;0]$
d) $\langle 0;+\infty\rangle$
e) $\{0\}$

19. *Sea* $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ *con la siguiente regla de correspondencia:*

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$

Determinar el rango la función "f".

a) $\mathbb{R}$
b) $\left[-1;\frac{1}{3}\right\rangle$
c) $\left\langle-1;\frac{1}{3}\right\rangle$
d) $\left[-1;\frac{1}{3}\right]$
e) $\mathbb{R}^+$

20. *Si la función "f" está definido por:*

$$f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{x^2-2x+14}\,; -5\le x<2\\ -3 \quad ;\ 2\le x<4\end{cases}$$

Su rango esta dado por:

a) $[-5;2]$
b) $\left[1+\sqrt{13}\,;8\right]$
c) $[4;8]\cup\{-3\}$
d) $\langle 4;6]\cup\{-3\}$
e) $\langle -5;2]\cup\{-3\}$

21. *El rango de la función:*

$g(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ *es* $[a;b\rangle$. *El valor de* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}$ *es:*

a) $\frac{1}{2}$
b) 2
c) 1
d) $\frac{3}{2}$
e) $\frac{5}{2}$

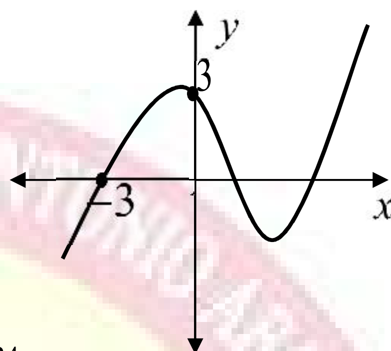
22. *El rango de la función:*

$z(x)=x^2-1\,; x<-3$ *es* $\langle c^3;+\infty\rangle$.

El valor de $"c-1"$ *es:*

a) 10
b) 8
c) 7
d) 1
e) 0

23. *Sea* $f(x)=x^3-ax+b$ *una función cuya grafica se muestra. El valor de* $"ab"$ *es:*



a) 24
b) -15
c) 8
d) 12
e) -6

24. *El rango de la función* $h(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{x^2-4}}$ *es:*

a) $\mathbb{R}$
b) $[0;+\infty\rangle$
c) $\langle -\infty;0]$
d) $\langle -2;2\rangle-\{0\}$
e) $\langle -\infty;-2\rangle\cup\langle 2;+\infty\rangle\cup\{0\}$

25. *Dada la función:*

$$h(x)=\begin{cases}2x+1;\ x\ge 2\\ 12x \ ;\ x<2\end{cases}$$

Si $x\in\left[\dfrac{2}{3};1\right]$, *el valor de* $h(3x)-h\left(\dfrac{x}{2}\right)$ *es:*

a) x
b) -1
c) $-x$
d) $x+1$
e) 1



f(x)=sgn(x) Ln x ÁLGEBRA $f(x)=ax^2+bx+c$ $\sqrt{x}$

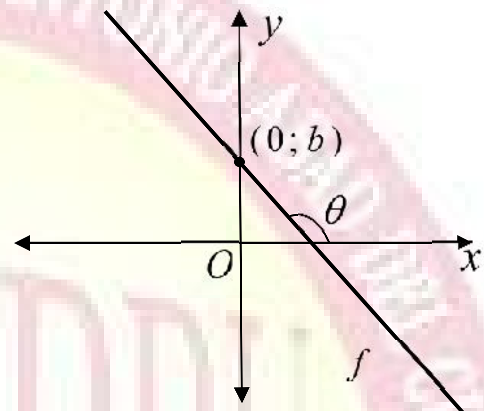
13 FUNCIONES ESPECIALES

I) FUNCIÓN LINEAL

Está definido por:

$$f=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y=mx+b\ ;m,b\in\mathbb{R}\wedge m\neq 0\}$$

$$Dom(f)=\mathbb{R}\quad\wedge\quad Ran(f)=\mathbb{R}$$



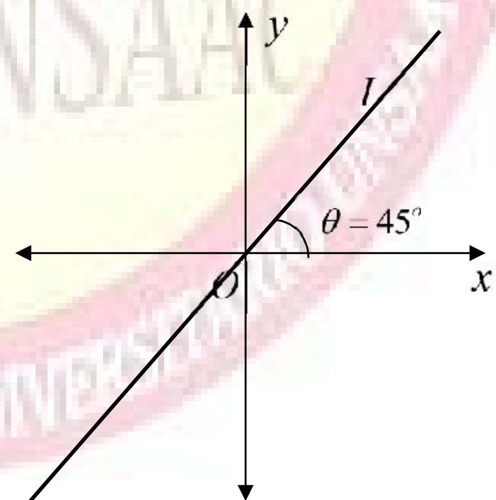
Se presentan los siguientes casos:

Si $m>0\wedge b<0$	Si $m>0\wedge b>0$	Si $m<0\wedge b<0$	Si $m<0\wedge b>0$

II) FUNCIÓN IDENTIDAD

$$I=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y=x\}\ ;\ I=id$$

$$Dom(f)=\mathbb{R}\quad\wedge\quad Ran(f)=\mathbb{R}$$

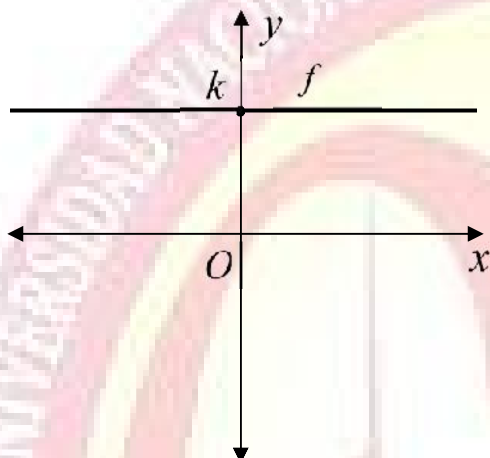


III) FUNCIÓN CONSTANTE

Está definido por:

$$f=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y=k\ ;\ k\in\mathbb{R}\}$$

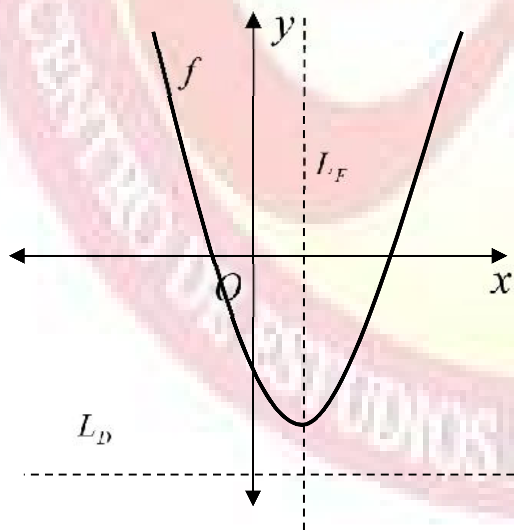
$$Dom(f)=\mathbb{R}\quad\wedge\quad Ran(f)=\{k\}$$



IV) FUNCIÓN CUADRÁTICA

Está definido por:

$$f=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y=ax^2+bx+c;a,b,c\in\mathbb{R}\wedge a\neq 0\}$$



V) FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

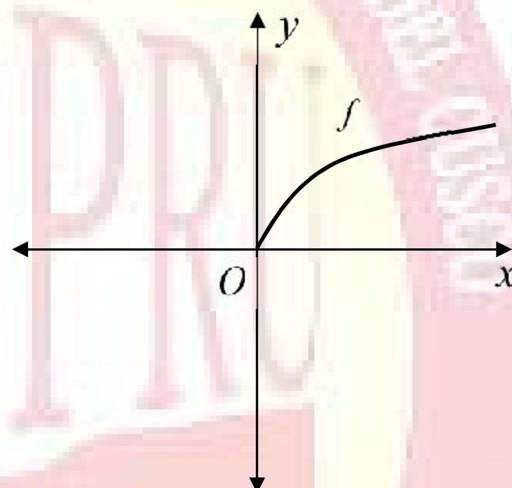
Está definido por:

$$f=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y=\sqrt{u(x)}\ ;con\ u(x)\geq 0\}$$

$$Dom(f)=\{x\in\mathbb{R}/u(x)\geq 0\}\quad\wedge\quad Ran(f)\subset\mathbb{R}$$

CASO PARTICULAR:

$$f=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y=\sqrt{x}\ ;\ con\ x\geq 0\}$$
$$Dom(f)=\left[0;+\infty\right\rangle\quad\wedge\quad Ran(f)=\left[0;+\infty\right\rangle$$



VI) FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

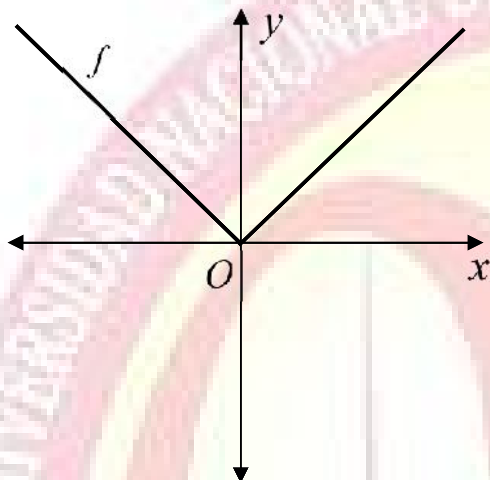
Está definido por:

$$f=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y=|u(x)|\}$$

$$Dom(f)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ u(x)\geq 0\vee u(x)<0\}$$
$$Ran(f)=\left[0;+\infty\right\rangle$$

CASO PARTICULAR

$f=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y=|x|\}$ donde
$Dom(f)=\mathbb{R}\quad\wedge\quad Ran(f)=\left[0;+\infty\right\rangle$



VII) FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

Está definido por:

$f=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y=u_a\left(h(x)\right)\right\}$ donde:

$$u_a(h(x))=\begin{cases}1;\,h(x)\geq a\\0;\,h(x)<a\end{cases}$$

$Dom(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,h(x)\geq a\vee h(x)<a\}$

$Ran(f)\;=\{0;1\}$

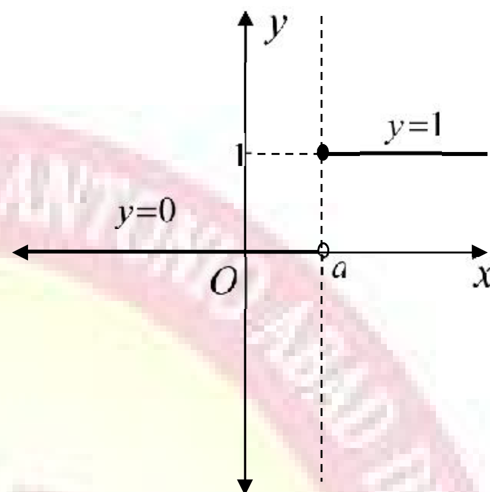
CASO PARTICULAR

$f=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y=u_a\left(x\right)\right\}$ donde:

$$y=u_a(x)=\begin{cases}1;\,x\geq a\\0;\,x<a\end{cases}$$

$Dom(f)=\mathbb{R}$

$Ran(f)\;=\{0;1\}$



VIII) FUNCIÓN SIGNO

Está definido por:

$f=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y=Sgn\left(h(x)\right)\right\}$ donde:

$$f(x)=Sgn(h(x))=\begin{cases}1\;\;;h(x)>0\\0\;\;;h(x)=0\\-1\;;h(x)<0\end{cases}$$

$Dom(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,h(x)>0\vee h(x)=0\;\vee h(x)<0\}$

$Ran(f)\;=\{-1;0;1\}$

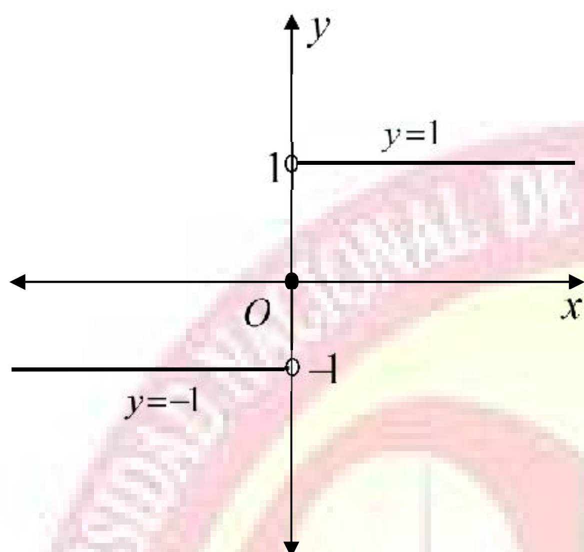
CASO PARTICULAR

$f=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y=Sgn\left(x\right)\right\}$ donde:

$$f(x)=Sgn(x)=\begin{cases}1\;\;;x>0\\0\;\;;x=0\\-1\;;x<0\end{cases}$$

$Dom(f)=\mathbb{R}$

$Ran(f)\;=\{-1;0;1\}$



IX) FUNCIÓN MÁXIMO ENTERO

Está definido por:

$f=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y=[\![h(x)]\!]\}$ donde:

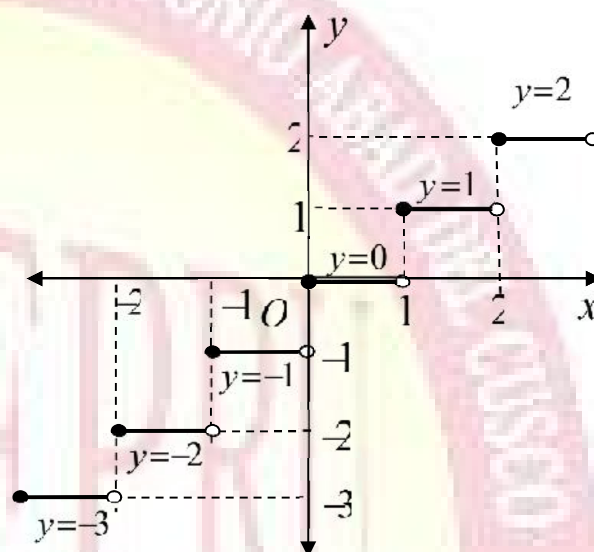
$f(x)=[\![h(x)]\!]=n \Leftrightarrow n\le h(x)<n+1;\, n\in\mathbb{Z}$

CASO PARTICULAR

$f=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y=[\![x]\!]\}$ donde:

$f(x)=[\![x]\!]=n \Leftrightarrow n\le x<n+1;\, n\in\mathbb{Z}$

$Dom(f)=\mathbb{R} \quad \wedge \quad Ran(f)=\mathbb{Z}$



EJERCICIOS

1. El área de la región formada por la función: $h(x)=7$; la función lineal $g(x)=3x-2$ y el eje "y", es:

a) $9u^2$
b) $3u^2$
c) $\frac{27}{2}u^2$
d) $\frac{9}{2}u^2$
e) $8u^2$

2. Dada función constante "h" tal que:
$$\frac{11h(2020)+2h(2019)}{3h(2021)+5}=6$$
El valor de $h(1)+h(2)+h(3)$ es:

a) 0
b) -18
c) -1
d) -12
e) 12

3. El rango de la función:
$g(x)=[\![x]\!]-x$; $\forall x\in\mathbb{R}$, es:

a) $\langle -1;0]$
b) $[-1;0]$
c) $\{-1;0\}$
d) $\langle 0;1]$
e) $\{0;1\}$

4. Dada la función cuadrática "g" cuya regla de correspondencia está dada por: $g(x)=x^2-2x+n+1$. Los valores que toma "n" para que el grafico de la función "g" intercepte al eje de las abscisas en dos puntos diferentes, es:

a) $n\in\langle -\infty;0\rangle$
b) $n\in\langle 0;+\infty\rangle$
c) $n\in\langle 1;+\infty\rangle$
d) $n\in\langle -\infty;1\rangle$
e) $n\in\mathbb{R}$

5. Si la función cuadrática:
$f=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y=ax^2+bx+c\}$
Pasa por los puntos $A=(1;2)$; $B=(-1;12)$ y $C=(0;4)$. El valor de $(a+b+c)$ es:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

6. La función $g(x)$ es lineal tal que $g(-1)=2$ y $g(2)=-3$. El valor de $g(5)$ es:

a) 4
b) -8
c) $\frac{1}{3}$
d) 5
e) 1

7. El rango de la función
$h(x)=U_1(x^2)$; $x\in\langle -\infty;-1\rangle\cup\langle 1;+\infty\rangle$, es:

a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R}-\{0;1\}$
c) $\{0;1\}$
d) $\langle 0;1\rangle$
e) $\langle -\infty;0\rangle\cup\langle 1;+\infty\rangle$

8. Dada la función constante:
$$g=\left\{\left(2;\frac{3a+7}{4}\right);(4;a+1);\left(6;\frac{7b-6}{2}\right);(9;7b-10)\right\}$$
El valor de "$a+b$" es:

a) 3
b) 5
c) 7
d) 9
e) 11

9. *Sea " f " una función lineal tal que:*

$f=\{(a;a);(-a;-3a);(a+2;-a-2)\}$

El valor de $f(2)f(0)$ *es:*

a) 14
b) 0
c) 21
d) 7
e) 1

10. *Sea:* $f(x)=x^2-4|x|-2$

El rango de la función es:

a) $\left[-2;+\infty\right\rangle$
b) $\left[-4;+\infty\right\rangle$
c) $\left[2;4\right]$
d) $\left[-6;+\infty\right\rangle$
e) $\left[-8;6\right]$

11. *La función " f " definida por:*

$f(x)=|2x-1|-x$

El rango de la función es:

a) $\left[\frac{1}{2};+\infty\right\rangle$
b) $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right\rangle$
c) $\left\langle-\infty;\frac{1}{2}\right]$
d) $\left\langle-\infty;-\frac{1}{2}\right]$
e) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

12. *Dada la función:*

$h(x)=x^2-[\![x]\!]+\operatorname{sgn}(|x|+1)$

El valor de $h(-2)$ *es:*

a) 7
b) 5
c) 27
d) 16
e) 24

13. *El mayor valor entero que se encuentra en el rango de la función:*

$g(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|+1};\ |x|\leq 1$ *es:*

a) 10
b) 1
c) 4
d) 0
e) -1

14. *Dada la función* f *tal que*

$f(x)=|x+3|-|x-3|$ *cuyo rango es* $[a;b]$. *El valor de* $a+b$ *es:*

a) 2
b) 4
c) 3
d) 0
e) 1

15. *El rango de la función:*

$g(x)=\operatorname{sgn}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right);\ 2\leq x<6$, *es:*

a) $\{-1;0;1\}$
b) $\{0;1\}$
c) $\left[0;+\infty\right\rangle$
d) $\left[1;+\infty\right\rangle$
e) $\{1\}$

16. *El dominio de la función:* $g(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2-16}}{x[\![x+4]\!]-x}$ *esta dado por:*

a) $\langle -\infty;-4] \cup [4;+\infty\rangle$

b) $\langle -\infty;-4] \cup [6;+\infty\rangle$

c) $\mathbb{R}-\{0;4\}$

d) $\langle -4;6\rangle$

e) $\langle -\infty;-4] \cup [5;+\infty\rangle$

17. *Dada la función:*

$$h(x)=x^2\,\text{sgn}\left(\frac{|x|^3+1}{x^2+x+1}\right)+\sqrt{x}\,\text{sgn}\left(\left[\!\!\left[\frac{1}{x^2+1}\right]\!\!\right]\right);x\neq 0$$

El valor de $h(6)$:

a) 36

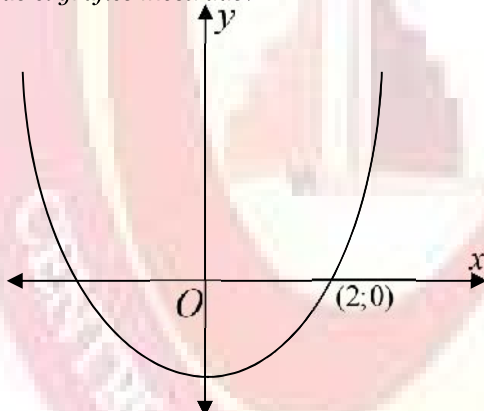
b) 3

c) 10

d) 24

e) 1

18. *Dado el grafico mostrado:*



Si el punto $(3;2)$ *pertenece a ella y la imagen de la función es el intervalo* $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right\rangle$. *La regla de correspondencia de la función es:*

a) $f(x)=x^2-3x+2$

b) $f(x)=x^2-3x-2$

c) $f(x)=2x^2-3x-2$

d) $f(x)=x^2+3x+2$

e) $f(x)=2x^2+3x+2$

19. *Dada la función:*

$$f(x)=x^2\,\text{sgn}\left[\frac{|x|^3+1}{x^2+x+1}\right]+\sqrt{x}\,\text{sgn}\left(\left[\!\!\left[\frac{1}{x^2+1}\right]\!\!\right]\right);x\neq 0$$

El conjunto $Dom(f)\cup Ran(f)$ *viene dado por:*

a) $[0;1]$

b) $\mathbb{R}-\{0;1\}$

c) $\mathbb{R}-[0;1]$

d) $\mathbb{R}-\{0\}$

e) $\langle 0;1\rangle$

20. *Dada la función:*

$$f(x)=x^{2022}[\![x-[\![x]\!]]\!]+\frac{|x|}{x}$$

El valor de $f(2023)$ *es:*

a) 2020

b) 0

c) 1

d) 10

e) 2023

21. *El rango de la función:*

$h(x)=\sqrt{[\![x]\!]-x}+[\![x]\!]$ *esta dado por:*

a) $\mathbb{R}$

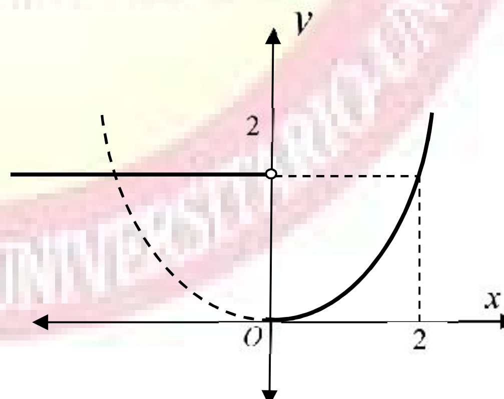
b) $\mathbb{Z}$

c) $[-1;1]$

d) $\{-1;0;1\}$

e) $\mathbb{Z}_0^-$

22. *Si la gráfica de la función "g" es:*



El valor de $g(-4)+g(4)$ *es:*

a) 10
b) 12
c) 8
d) 4
e) 2

23. *El rango de la función:*
$g(x)=|x-1|+|x-2|$ *es:*

a) $\left[6;+\infty\right\rangle$
b) $\left[0;+\infty\right\rangle$
c) $\left[4;+\infty\right\rangle$
d) $\left[1;+\infty\right\rangle$
e) $\mathbb{R}_0^+$

24. *El dominio de la función:*
$$h(x)=\frac{\sqrt{4-|x-2|}}{x}+\sqrt{[\![\operatorname{sgn}(x^2)+x^2]\!]-2}$$ *es:*

a) $[-2;6]-\{0\}$
b) $\left\langle-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right\rangle$
c) $[-2;-1]\cup[1;6]$
d) $[-4;4]-\{0\}$
e) $\mathbb{R}-\{0\}$



ÁLGEBRA

14 CLASES DE FUNCIONES

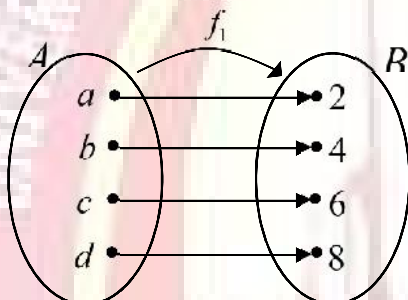
I) FUNCIÓN INYECTICA (UNIVALENTE O UNO A UNO)

Una función $f: A \to B$ es inyectiva, cuando a cada elemento del rango de la función ($Ran(f) \subset B$) le corresponde un único elemento del dominio ($Dom(f) \subset A$). Esto es:

$f: A \to B$ **es inyectiva, sí para** $y \in B; \exists! x \in A / y = f(x)$

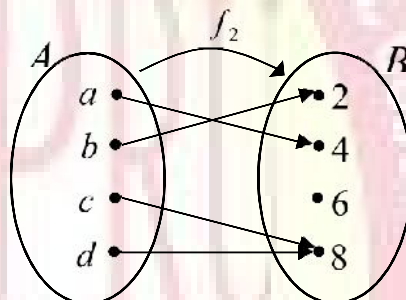
Ejemplos: *Dadas las siguientes relaciones.*

- $f_1 = \{(a;2);(b;4);(c;6);(d;8)\}$



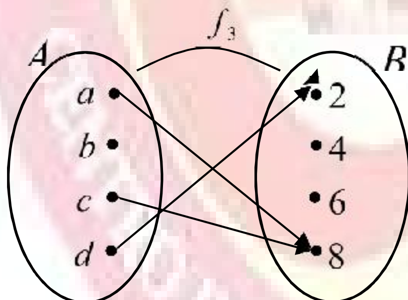
SI** es una **función inyectiva.

- $f_2 = \{(a;4);(b;2);(c;8);(d;8)\}$



NO** es una **función inyectiva.

- $f_3 = \{(a;8);(d;2);(c;8)\}$



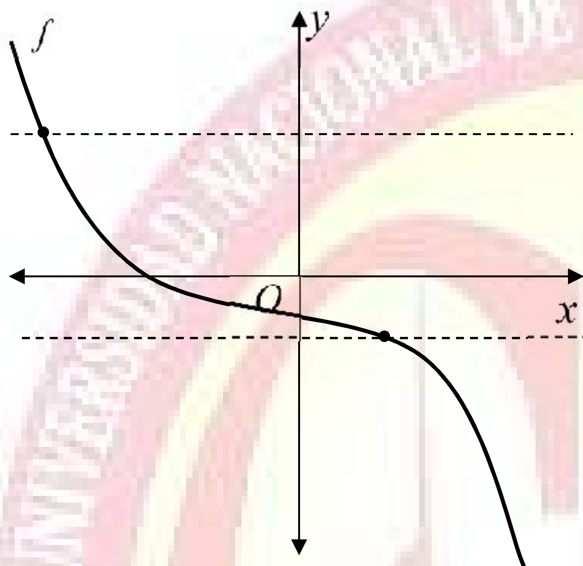
NO** es una **función inyectiva.

OBSERVACIÓN:

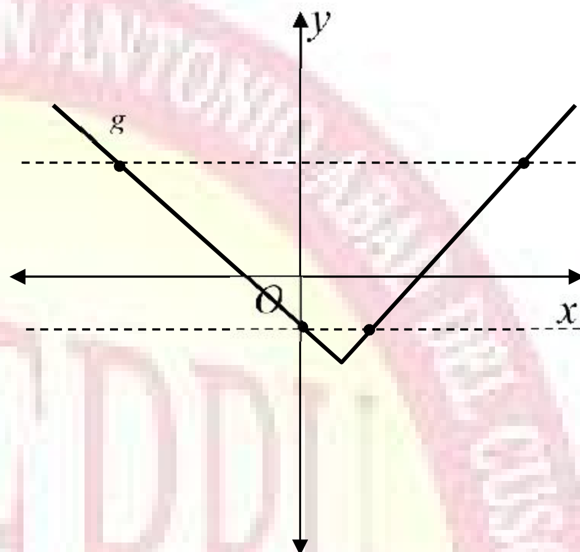
*Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **es inyectiva**, cuando cualquier recta HORIZONTAL corta a la gráfica de la función en un único punto.*

Ejemplos:

- *La gráfica de la función f es cortada en un solo punto por cualquier recta horizontal, en consecuencia, es INYECTIVA.*



- *La gráfica de la función g es cortada en dos puntos por cualquier recta horizontal, en consecuencia, NO es INYECTIVA.*



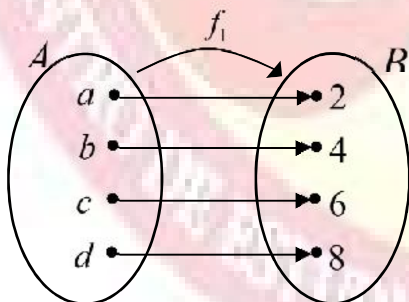
II) FUNCIÓN SURYECTIVA

La función $f: A \to B$ es suryectiva o sobreyectiva, sí todo elemento $y \in B$ es imagen de algún elemento $x \in A$.

$$f: A \to B \text{ es Suryectiva } \Leftrightarrow \forall y \in B; \exists x \in A / y = f(x)$$
$$\Leftrightarrow Ran(f) = B$$

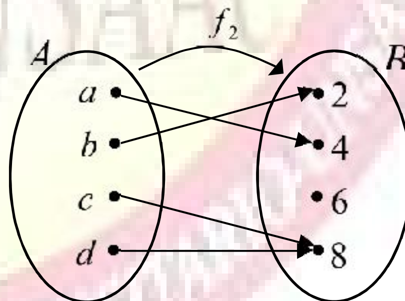
Ejemplos: *Dadas las siguientes relaciones.*

1. $f_1 = \{(a;2);(b;4);(c;6);(d;8)\}$



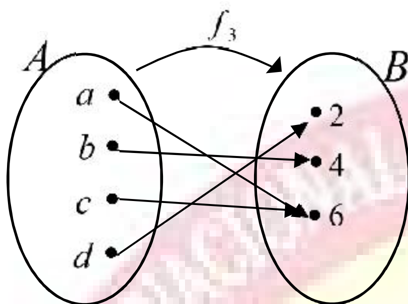
SI *es una* ***función suryectiva.***

2. $f_2 = \{(a;4);(b;2);(c;8);(d;8)\}$



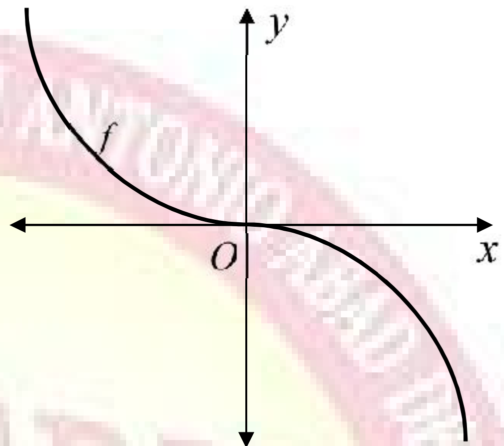
NO *es una* ***función suryectiva.***

3. $f_3 = \{(a;6);(c;6);(b;4);(d;2)\}$

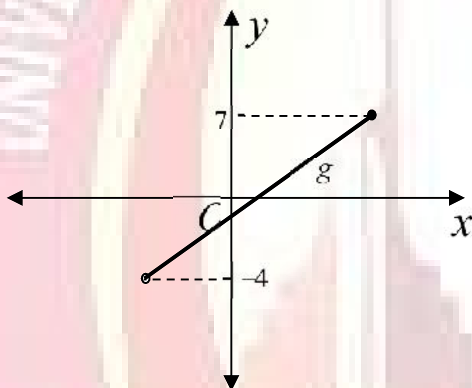


SI** es una **función Suryectiva.

4. *La gráfica de la función* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *es suryectiva, pues tenemos que* $Ran(f)=\mathbb{R}$



5. *La gráfica de la función* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *NO es suryectiva, pues tenemos que* $Ran(f)=\langle -4;7]\neq\mathbb{R}$



III) FUNCIÓN BIYECTIVA

Una función $f:A\to B$ *es una función biyectiva, cuando es inyectiva y suryectiva a la vez. Esto es:*

$f:A\to B$ *es Biyectiva, si y solamente sí "* f *" es inyectiva y suryectiva*

EJERCICIOS

1. *Si la función:*

$g = \{(a+b+2;3);(5;3a+2b);(a-b;3);(5;8)\}$

Es inyectiva, el valor de "$2a+3b$" *es:*

a) 2
b) 4
c) 8
d) 16
e) 32

2. *Dadas las siguientes proposiciones:*

I) $f(x)=5x-4$

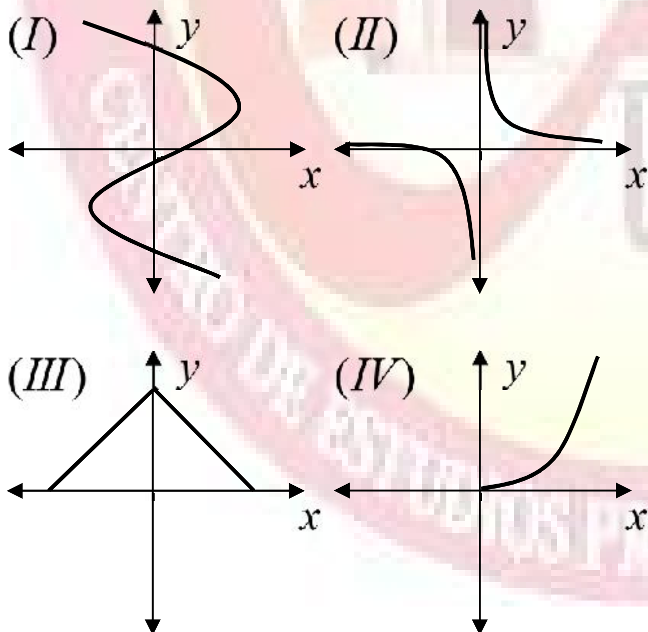
II) $g(x)=x^2$

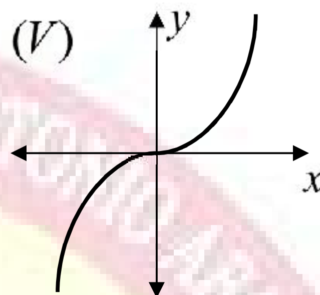
III) $h(x)=x^3$

Las funciones que son inyectivas son:

a) Solo I
b) I y II
c) I y III
d) II y III
e) Todas

3. *¿Cuál de los siguientes graficas representa una función inyectiva?*





a) I y IV
b) Solo V
c) II ; IV y V
d) II y V
e) Solo III

4. *Sean los conjuntos* $A=\{1;2;3;4;5;6\}$ *y* $B=\{a;b;c;d;e\}$ *y consideremos las siguientes proposiciones:*

$I)\ f:A\to B/ f=\{(2;a);(3;c);(4;e);(6;d)\}$

$II)\ g:A\to B/ g=\{(1;c);(2;b);(3;d);(5;c)\}$

$III)\ h:A\to B/ h=\{(1;c);(2;d);(3;b);(5;a);(6;e)\}$

Las funciones que son biyectivas son:

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) I y II
e) I y III

5. *Se define las siguientes funciones:*

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/ f(x)=|x-6|$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/ g(x)=x^2-9$

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/ h(x)=x+20$

Y sean los siguientes enunciados son correctos:

I) f es función inyectiva.

II) g es función inyectiva.

III) h es función biyectiva.

Los enunciados correctos son:

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) I y II
e) II y III

6. *Dada la función suryectiva:*

$g:[-1;5\rangle \to \langle a;b] / g(x)=3-2x$

El valor de $(a+b)^3$ *es:*

a) 8
b) 1
c) -8
d) 27
e) -64

7. *Dada la función:*

$f(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{33}{16}$ *siendo* "f" *inyectiva. El valor máximo de* "m" *, sí* $x\in[-2;m]$*, es:*

a) 0,25
b) $-0,25$
c) $-0,025$
d) 0,5
e) $-0,5$

8. *Se define la función sobreyectiva* f *por:*

$f:\mathbb{R}\to N \big/ f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

El valor de N *es:*

a) $\left[-\frac{1}{2};0\right\rangle$
b) $[-1;0\rangle$
c) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$
d) $\langle 0,1]$
e) $\left\langle 0;\frac{1}{2}\right]$

9. *Sea la función* $g:[1;4]\to[a;b]$ *definida por* $g(x)=x^2-2x+3$ *. El valor de* "$a+b$" *para que* "g" *sea inyectiva y sobreyectiva, es:*

a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15

10. *Sean* $f:[2;4]\to A / f(x)=1-2x$ *biyectiva y* $g:A\to B / g(x)=\frac{7}{x+1}$ *biyectiva. El conjunto* "B" *viene dado por:*

a) $\left[-\frac{7}{2};-\frac{7}{6}\right]$
b) $[-7;-3]$
c) $\left[-\frac{21}{2};-\frac{25}{6}\right]$
d) $\left[-21;-\frac{25}{3}\right]$
e) $[2;4]$

11. *Sea* $f:\langle 1;5\rangle\to\langle a;b\rangle$ *tal que* $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$. *El valor de* "$a+b$"*, si a función es sobreyectiva, es:*

a) 1
b) $\frac{1}{4}$
c) 2
d) $\frac{1}{8}$
e) $\frac{1}{2}$

12. *Dada la función sobreyectiva* $h:M\to[1;10]$ *con regla de correspondencia* $h(x)=x^2-2x+2$*. El conjunto* M *es:*

a) $\langle -2;4\rangle$
b) $\langle -\infty;-2\rangle\cup\langle 4;+\infty\rangle$
c) $[-2;4]$
d) $[-2;2]$
e) $\langle 0;4]$

13. *Dada la función* $h:\langle 0;4]\to\langle -1;15]$ *cuya regla de correspondencia es* $h(x)=x^2-1$*. Indique con (V) si es verdadero y con (F) si es falso, según corresponda:*

I) "h" no es inyectiva.
II) "h" es sobreyectiva.
III) "h" es biyectiva.

La secuencia correcta:

a) VVF
b) FVV
c) VFF
d) FVF
e) VVV

14. Si: $f:\mathbb{R}\to B$; es una función Sobreyectiva tal que: $f(x)=|x-2|-x$; el conjunto B es:

a) $\left[2;+\infty\right\rangle$
b) $\left[-2;2\right]$
c) $\left[2;0\right\rangle$
d) $\left[-2;0\right]$
e) $\left[-2;+\infty\right\rangle$

15. El valor de verdad de las siguientes proposiciones es:

I) $f:\mathbb{R}^-\to\left[1;+\infty\right\rangle / f(x)=1-x$, es inyectiva.
II) $g:\mathbb{R}^-\to\left[1;+\infty\right\rangle / g(x)=x^2+1$, es sobreyectiva
III) $h:\langle 2;5\rangle\to\left\langle \frac{3}{2};3\right\rangle / h(x)=\frac{x+1}{x-1}$, es biyectiva.

a) FVF
b) VFF
c) FFV
d) VVF
e) VFV

16. Dada la función biyectiva:
$f:[1;4]\to[2;6] / f(x)=\frac{1}{ax+b}$
El valor de "b" es:

a) $\frac{1}{2}$
b) 3
c) $-\frac{1}{18}$
d) $\frac{1}{18}$
e) $\frac{2}{3}$

17. Dada la función:
$g=\{(a+b;3);(5;3a+2b);(2a-b;3);(5;8);(2;a^2+b^2)\}$
es inyectiva, el valor de $g(2)$ es:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 10
e) 13

18. Indicar cuales de las proposiciones son falsas.

I) La función: $f(x)=x+\sqrt{x^2+7};\, x\in[-3;3]$ no es inyectiva.
II) La función: $f:\mathbb{R}\to\left[0;+\infty\right\rangle / f(x)=5x^2$ es suryectiva.
III) La función $h:\langle -4;3]\to\left[-9;13\right\rangle / h(x)=-2x+1$ es biyectiva.

a) I y III
b) II y III
c) Solo I
d) Solo II
e) Todas

19. Sean $f:[2;4]\to A$, $f(x)=1-2x$ biyectiva y $g:A\to B$, $g(x)=\frac{7}{x+1}$ biyectiva. El conjunto "B" viene dado por:

a) $\left[-\frac{7}{2};-\frac{7}{6}\right]$
b) $[-7;-3]$
c) $\left[-\frac{21}{2};-\frac{25}{6}\right]$
d) $\left[-21;-\frac{25}{3}\right]$
e) $[2;4]$

20. *Considere que "g" es una función. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes establecen que "g" es una función inyectiva?*

I) *Toda recta horizontal interseca a la gráfica de la función "g" una sola vez.*

II) *Toda recta horizontal interseca a la gráfica de la función "g" a lo más una vez.*

III) *Toda recta horizontal que interseca a la gráfica de "g" lo hace una vez.*

IV) *Para cada $y \in Ran(g)$, la ecuación $g(x) = y$ con $x \in Dom(g)$ tiene una única solución.*

a) *I y II*
b) *Solo I*
c) *II ; III y IV*
d) *Solo II*
e) *Todas*

21. *Dada la función biyectiva:*
$h:[-1;0] \to [a;b] / h(x) = x^2 - 2020$
El valor de $a^2 - b^2$ es:

a) 4039
b) 2020
c) 2021
d) 1
e) 2039

22. *Dada la función $f:[b;+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 6x + 6$ sea inyectiva. El menor valor de "b" es:*

a) 16
b) -2
c) -3
d) 2
e) 3

23. *Sea la función $f:[1;4] \to [a;b]$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 3$, El valor de $a+b$ para que f se biyectiva, es:*

a) 10
b) 5
c) 13
d) 12
e) 9

24. *Sea $h: A \to B / h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6}$ una función sobreyectiva. El conjunto $A - B$ es:*

a) $\{1\}$
b) $\{1;3\}$
c) $\{1;-4\}$
d) $\{-2;-3\}$
e) $\{2;3\}$





OPERACIONES CON FUNCIONES

I) IGUALDAD DE FUNCIONES

DEFINICIÓN.

Decimos que las funciones "f" y "g" son iguales y lo denotamos por $f=g$, cuando el dominio de la función "f" es igual al dominio de la función "g" y además sus reglas de correspondencias son iguales. Esto es:

$$f=g \Leftrightarrow Dom(f)=Dom(g) \wedge f(x)=g(x)$$

II) ADICIÓN DE FUNCIONES

$$f+g=\{(x,f(x)+g(x))/\forall x\in Dom(f+g)=Dom(f)\cap Dom(g)\neq\phi\}$$

III) SUSTRACCIÓN DE FUNCIONES

$$f-g=\{(x,f(x)-g(x))/\forall x\in Dom(f-g)=Dom(f)\cap Dom(g)\neq\phi\}$$

IV) MULTIPLICACIÓN DE FUNCIONES

$$fg=\{(x,f(x)g(x))/\forall x\in Dom(fg)=Dom(f)\cap Dom(g)\neq\phi\}$$

V) DIVISIÓN DE FUNCIONES

$$\frac{f}{g}=\left\{\left(x,\frac{f(x)}{g(x)}\right)/\forall x\in Dom\left(\frac{f}{g}\right)=Dom(f)\cap Dom(g)-\{x\in Dom(g)/g(x)=0\}\right\}$$

VI) COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sean las funciones $f:A\to B/y=f(x)$ y $g:B\to C/z=g(y)$ de modo que se cumpla que $Ran(f)\cap Dom(g)\neq\phi$. Definimos la composición de la función "f" con "g", denotado por "$g\circ f$", a la función.

$$g\circ f=\{(x,y)/y=(g\circ f)(x)=g(f(x));\ \forall x\in Dom(g\circ f)\}\ \text{donde}$$
$$Dom(g\circ f)=\{x\in A/x\in Dom(f)\wedge f(x)\in Dom(g)\}$$

PROPIEDADES:

Dadas las funciones $f:A\rightarrow B$, $g:B\rightarrow C$ *y* $h:C\rightarrow D$, *luego tenemos:*

1. $g\circ f\neq f\circ g$
2. $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$
3. $f\circ id_A=f\ \wedge\ id_B\circ f=f$
4. $(f+g)\circ h=f\circ h+g\circ h$
5. $(f\cdot g)\circ h=(f\circ h)\cdot(g\circ h)$
6. *Sí* "f" *y* "g" *son funciones inyectivas, entonces* "$g\circ f$" *es inyectiva.*
7. *Sí* "f" *y* "g" *son funciones suryectivas, entonces* "$g\circ f$" *es suryectiva.*
8. *Sí* "f" *y* "g" *son funciones biyectivas, tenemos que* "$g\circ f$" *es biyectiva.*

FUNCIÓN INVERSA

Si $f=\{(x,y)/\,y=f(x);\forall x\in Dom(f)\}$ *es una función inyectiva, entonces* f^{-1} *existe y está definida por:*

$$f^{-1}=\{(y,x)/\,x=f^{-1}(y);\forall x\in Dom(f)\}$$

OBSERVACIÓN:

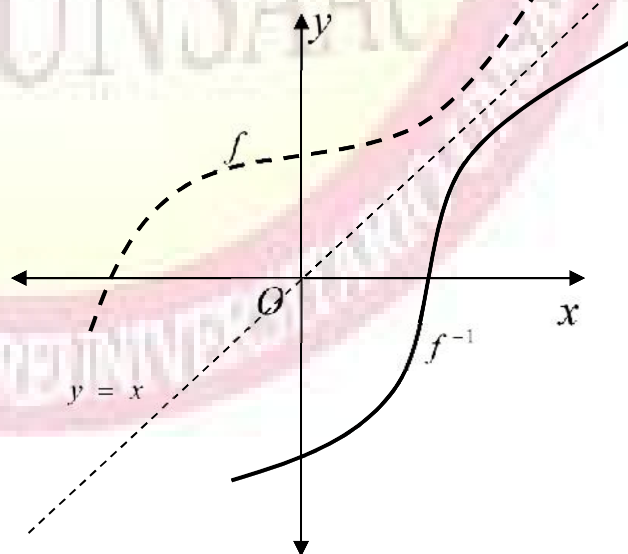
La inversa de la función $f:A\rightarrow B$ *en lo sucesivo se denotará por* $f^{-1}:B\rightarrow A$.

PROPIEDADES:
Sean f *y* g *funciones inyectivas, entonces:*

1. $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.
2. $(f^{-1})^{-1}=f$
3. $Dom(f)=Ran(f^{-1})$.
4. $Ran(f)=Dom(f^{-1})$
5. $f^{-1}\circ f=id$
6. $f\circ f^{-1}=id$

OBSERVACIÓN:

La gráfica de la función "f^{-1}" *es simétrica de la gráfica de* "f", *con respecto a la gráfica de la función identidad.*



EJERCICIOS

1. *Dadas las funciones:*

$f=\{(1;3);(2;6);(4;8);(6;2)\}$

$g=\{(0;1);(1;2);(2;-1);(4;5);(7;0)\}$

La suma de elementos del rango de la función "$f+g$" *es:*

a) 10
b) 5
c) 13
d) 23
e) 18

2. *Sean las funciones:*

$f=\{(2;5);(3;4);(4;1);(5;0)\}$

$g=\{(0;1);(1;2);(2;1)\}$

La función $f+g+f\cdot g$ *viene dada por:*

a) $\{(2;11)\}$
b) $\{(2;9)\}$
c) $\{(1;7)\}$
d) $\{(3;11)\}$
e) $\{(11;2)\}$

3. *Sean:*

$f(x)=\sqrt{x-3}$

$g=\{(0;1);(1;4);(2;3);(4;5);(6;-2)\}$

El producto de elementos del rango de f^2+3g *es:*

a) 16
b) 32
c) -32
d) -48
e) 54

4. *El dominio de la función* "$h\circ g$":

$h(x)=x^2-3\,;\ x\in[-2;7\rangle$.

$g(x)=2x-1\,;\ x\in[-1;5\rangle$

Es:

a) $\left[-\frac{1}{2};4\right\rangle$
b) $\left\langle-\frac{1}{2};4\right]$
c) $\left\langle-\frac{1}{2};4\right\rangle$
d) $\left\langle\frac{1}{2};4\right]$
e) $\left[\frac{1}{2};4\right\rangle$

5. *Siendo* "f" *y* "g" *dos funciones definidas por:*

$f(x)=\sqrt{x+5}\wedge g(x)=\sqrt{5-x}$

El dominio de "$f\cdot g$" *es:*

a) $\langle-5;5\rangle$
b) $[-3;3\rangle$
c) $[5;+\infty\rangle$
d) $\langle-\infty;-5]\cup[5;+\infty\rangle$
e) $[-5;5]$

6. *Dadas las funciones:*

$g(x)=\sqrt{1-x}$

$h(x)=\sqrt{4-x^2}$

El dominio de la función "$h\circ g$" *es:*

a) $\langle-3;1\rangle$
b) $[-3;1\rangle$
c) $\langle-3;1]$
d) $[-3;1]$
e) $\langle-\infty;1]$

7. *Dadas las funciones:*

$f = \{(0;0);(4;3);(2;4);(-3;2);(3;-1)\}$

$g = \{(6;2);(3;4);(2;0);(4;7)\}$

La suma de elementos del rango de la función $f \circ g$ *es:*

a) 3
b) 5
c) 7
d) 9
e) 11

8. *Si:*

$g(x) = x^2 + 2$

$h(x) = x + a$

El valor de "a" *para que se cumpla* $(g \circ h)(3) = (h \circ g)(a-1)$, *es:*

a) -8
b) $-\dfrac{8}{7}$
c) $-\dfrac{7}{8}$
d) $\dfrac{1}{7}$
e) $\dfrac{1}{8}$

9. *Sean:*

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$g = \left\{(2;4);(5;3);(-6;8);(0;2);\left(-\dfrac{1}{2};5\right)\right\}$

El valor de $(f \circ g^{-1})(4)$ *es:*

a) $\sqrt{24}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{35}$
d) $\sqrt{5}$
e) $-\sqrt{35}$

10. *Dadas las funciones:*

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \wedge g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

El rango de $f \cdot g$ *es:*

a) $\langle 2;4 \rangle$
b) $\langle 2;+\infty \rangle$
c) $\langle -\infty;-2 \rangle$
d) $\langle -4;-2 \rangle$
e) $\langle 0;+\infty \rangle$

11. *Si:* $f(x) = 2x - 3b$, *el valor de* "b" *para que se cumpla la siguiente igualdad* $f(b+1) = 3f^{-1}(b^2);\ b \in \mathbb{R}$, *es:*

a) 3
b) 4
c) -3
d) -4
e) 2

12. *Si* $f(x) = x^2 \wedge (f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$

La regla de correspondencia de la función "g" *es:*

a) $2x - 3$
b) $-(2x-3)$
c) $2x + 3$
d) $\pm(2x-3)$
e) $\pm(2x+3)$

13. *Se define la función* "f" *mediante:*

$f(x) = 2x + m \wedge f(m) = 2f^{-1}(m^2);\ m \neq 0$

El valor de $H = \dfrac{f(1)}{f^{-1}(1)}$ *es:*

a) -8
b) -4
c) -3
d) -2
e) -1

14. *Dadas las funciones:*

$f(x) = \sqrt{2x - x^2 + 3} \wedge g(x) = x - 1$

La función $h = f \circ g$ *viene dado por:*

a) $h(x)=\sqrt{4x-x^2}$; $-2\le x\le 2$
b) $h(x)=\sqrt{4x-x^2}$; $0\le x\le 4$
c) $h(x)=\sqrt{x^2-1}$; $1\le x\le 4$
d) $h(x)=\sqrt{x^2+4x}$; $0<x\le 1$
e) $h(x)=\sqrt{x-x^2+1}$; $-1<x\le 1$

15. *Sean las funciones:*

$f(x)=x^2-\sqrt{x^2-1}\ \wedge\ g(x)=1+\sqrt{x^2-1}$

El conjunto $Dom(f+g)\cup Ran(f+g)$ *está dado por:*

a) $\mathbb{R}$
b) $\langle -1;1\rangle$
c) $\mathbb{R}-\langle -1;1\rangle$
d) $[0;+\infty\rangle$
e) $[1;+\infty\rangle$

16. *Sean las funciones:*

$f=\{(1;2);(3;4);(2;6);(5;7)\}$

$g=\{(2;3);(4;1);(3;6);(5;9)\}$

$h(x)=x+2\ ; x\in\langle -2;2\rangle$

La suma de los elementos del rango de $(f+g)\circ h$ *es:*

a) 16
b) 18
c) 19
d) 20
e) 21

17. *Sea la función* f *que esta dado por:*

$f(x)=x^2+4x-1\ ;\ \forall x\in\langle -4;-3\rangle$

Luego la función $f^{-1}(x)$ *es:*

a) $f^{-1}(x)=-2-\sqrt{x+5}$
b) $f^{-1}(x)=-2+\sqrt{x+5}$
c) $f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+5}$
d) $f^{-1}(x)=2-\sqrt{x+5}$
e) $f^{-1}(x)=-1-\sqrt{x+5}$

18. *Si las funciones:*

$f(x)=x(x+2)\ ;\ -2\le x\le 7$

$g(x)=3x+4\ ;\ -4<x\le 0$

El dominio de $f\circ g$ *es:*

a) $[-2;0]$
b) $[-2;2\rangle$
c) $[-2;1\rangle$
d) $[-2;-1]$
e) No existe

19. *Se definen las funciones:*

$f=\{(0;0);(1;0);(2;1);(3;2);(4;3)\}$

$g(x)=\sqrt{x+3}\ ; x\in\langle -3;3\rangle$

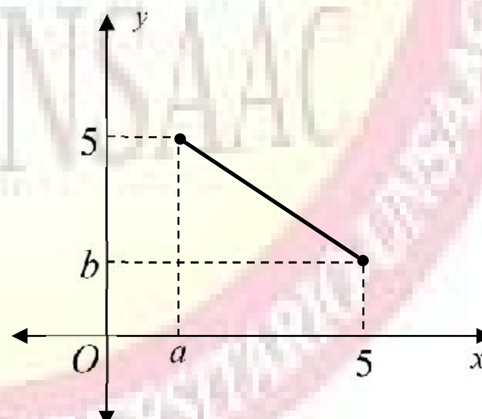
El valor de "$a+b$", *si* $(g^2+f)(a)=3$ *y* $(g^2+f)^{-1}(6)=b$, *es:*

a) 2
b) 3
c) −1
d) 0
e) 8

20. *Se tiene la función biyectiva.*

$f:[3;n]\to[4;m]$.

Cuyo gráfico se muestra.



La función f^{-1} *esta dado por:*

a) $f^{-1}(x) = 5 - 2x \; ; x \in [3;5]$
b) $f^{-1}(x) = 7 - x \; ; x \in [4;10]$
c) $f^{-1}(x) = 7 + \frac{x}{2} \; ; x \in [4;8]$
d) $f^{-1}(x) = \frac{14 - x}{2} \; ; x \in [4;10]$
e) $f^{-1}(x) = 7 - \frac{x}{2} \; ; x \in [4;8]$

21. *Dada las funciones:*

$$f : [3;+\infty\rangle \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$g : \left[\frac{1}{2};+\infty\right\rangle \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = \frac{2x+1}{x}$$

La función $g \circ f$ *es:*

a) $(g \circ f)(x) = x \; ; x \in [3;4]$
b) $(g \circ f)(x) = x+1 \; ; x \in [4;5]$
c) $(g \circ f)(x) = x-1 \; ; x \in [2;3]$
d) $(g \circ f)(x) = \frac{x}{1-x} \; ; x \in [2;4]$
e) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x} \; ; x \in [3;4]$

22. *Determine cuáles de las siguientes funciones son invertibles.*

I) $f(x) = \frac{x+a}{x+b} \wedge a \neq b$

II) $g(x) = \sqrt{1-x^2} \; ; 0 \leq x \leq 1$

III) $h(x) = \sqrt{x^2 - 1} \; ; x \leq -1$

a) Solo I
b) I y II
c) II y III
d) Ninguna
e) Todas

23. *Dada la función:*

$$f(x) = \sqrt{\frac{2|x| + x + 2}{3x^{3/2} + 2x^{1/2}}}$$

La función $f^{-1}(x)$ *viene dado por:*

a) $f^{-1}(x) = x$
b) $f^{-1}(x) = 4x^4 - 5x$
c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^4}$
d) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2}$
e) $f^{-1}(x) = x^4$

24. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{ax+7}{2x-b}$$

Tal que se cumple

I. $Dom(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{3\}$

II. $f^{-1} = f$

El valor de "ab" *es:*

a) 12
b) 6
c) 36
d) −12
e) 0

25. *Dadas las funciones:*

$$f(x) = \sqrt{x-4} \; ; x \in [0;6]$$

$$g(x) = \sqrt{x^4 + 4x^2 + 4} \; ; x \in [-1;3]$$

El dominio de $f \circ g$ *es:*

a) $[-6;6]$
b) $[-2;3\rangle$
c) $\langle -4;1\rangle$
d) $[-3;4]$
e) $[-1;2]$



FUNCIÓN EXPONENCIAL

Es la función:

$$f=\exp=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=b^x;\forall x\in\mathbb{R};\forall b\in\mathbb{R}^+-\{1\}\}$$

GRAFICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Para representar gráficamente la función exponencial, tenemos que considerar dos casos:

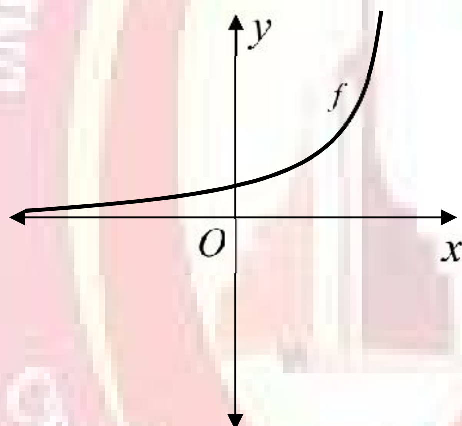
I.Si: b>1

En este caso tenemos que:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+ / f(x)=b^x$; $b>1$

$Dom(f)=\mathbb{R}\ \wedge\ Ran(f)=\langle 0;+\infty\rangle$

Y su representación gráfica es:



PROPIEDADES:

Sea la función exponencial $f(x)=b^x$ *para* $b>1$, *entonces:*

1. *La función "f" es creciente, es decir:* $\forall x_1;x_2\in\mathbb{R}; x_1<x_2\Rightarrow b^{x_1}<b^{x_2}$
2. *"f" es inyectiva en todo su dominio.*
3. *El punto* $(0;1)$ *es el punto de intersección de la función "f" con el eje de las ordenadas.*
4. *Cuando la variable "x" se aproxima a "$+\infty$", los valores $f(x)$ se aproximan a "$+\infty$".*
5. *Cuando la variable "x" se aproxima a "$-\infty$", los valores $f(x)$ se aproximan a "0".*

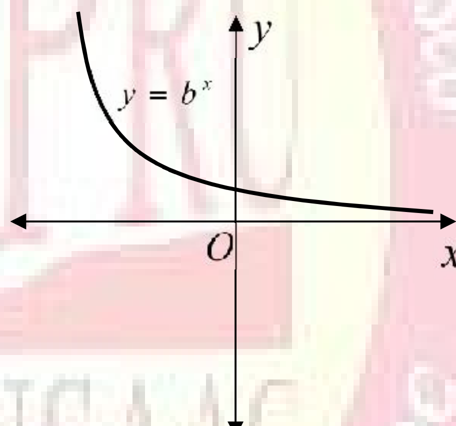
II. Si: 0<b<1

En este caso tenemos que:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+ / f(x)=b^x$; $b>1$

$Dom(f)=\mathbb{R}\ \wedge\ Ran(f)=\langle 0;+\infty\rangle$

Y su representación gráfica es:



PROPIEDADES:

Sea la función exponencial $f(x)=b^x$ *para* $0<b<1$, *entonces:*

1. *La función "f" es decreciente, esto es:* $\forall x_1;x_2\in\mathbb{R}; x_1<x_2\Rightarrow b^{x_1}>b^{x_2}$
2. *"f" es inyectiva en todo su dominio.*
3. *El punto* $(0;1)$ *es el punto de intersección de la función "f" con el eje de las ordenadas.*
4. *Cuando la variable "x" se aproxima a "$+\infty$", los valores $f(x)$ se aproximan a "0".*
5. *Cuando la variable "x" se aproxima a "$-\infty$", los valores $f(x)$ se aproximan a "$+\infty$".*

OBSERVACIÓN:

Dada que la función exponencial $f = \exp = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = b^x ; \forall x \in \mathbb{R}; \forall b \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \right\}$ *es inyectiva, entonces esta admite una inversa.*

LOGARITMO DE UN NÚMERO

Sea $N \in \mathbb{R}^+$ *y* $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ *con* $b \neq 1$*. El logaritmo de* "N" *en la base* "b" *es el exponente a la cual se debe elevar la base* "b" *para obtener el número* "N"*. Esto es:*

$$\log_b N = x \Leftrightarrow b^x = N$$

PROPIEDADES

1) $b^{\log_b N} = N \, ; \, N \in \mathbb{R}^+ ; \, \forall b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

2) $\log_b 1 = 0 \; ; \forall b \in \mathbb{R}^- - \{1\}$

3) $\log_b b = 1 \; ; \forall b \in \mathbb{R}^- - \{1\}$

4) $\log_b MN = \log_b M + \log_b N \; ; \forall M, N \in \mathbb{R}^+ ; \forall b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

5) $\log_b \left(\dfrac{M}{N} \right) = \log_b M - \log_b N \; ; \forall M, N \in \mathbb{R}^+ ; \forall b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

6) $\log_b N^n = n \log_b N ; \, \forall N \in \mathbb{R}^+ ; n \in \mathbb{Q} ; \forall b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

7) $\log_{b^m} N = \dfrac{1}{m} \log_b N ; \, \forall N \in \mathbb{R}^+ ; \forall b \in \mathbb{R}^+ - \{1\} ; m \in \mathbb{Q}$

8) $\log_b N = \dfrac{\log_m N}{\log_m b} \; \forall N \in \mathbb{R}^+ ; \forall b \in \mathbb{R}^- - \{1\} ; \forall m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

9) $\log_b N \cdot \log_N M \cdot \log_M Q = \log_b Q$
$\forall N, M, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\} ; \forall Q \in \mathbb{R}^+$

OBSERVACIÓN:

1. $\log_{10} N = \log N$
2. *Si* $b = e = 2,7182...$ *entonces* $\log_b N = \ln N$

COLOGARITMO Y ANTILOGARITMO

- $co \log_b N = -\log_b N \; ; \, \forall N \in \mathbb{R}^+ ; \forall b > 0 \wedge b \neq 1$

- $anti \log_b N = b^N \; ; \, \forall N \in \mathbb{R}^+ ; \forall b > 0 \wedge b \neq 1$

PROPIEDADES.

1. $anti \log_b \left(\log_b N \right) = N$
2. $\log_b \left(anti \log_b N \right) = N$
3. $co \log_b \left(anti \log_b N \right) = -N$

FUNCIÓN LOGARITMICA

Es la función definida por:

$$f = \log = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = \log_b x; \forall x > 0 \wedge \forall b \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \right\}$$

GRAFICA DE LA FUNCIÓN LOGARITMICA

Tenemos dos casos para la representación gráfica de una función logarítmica y estos son:

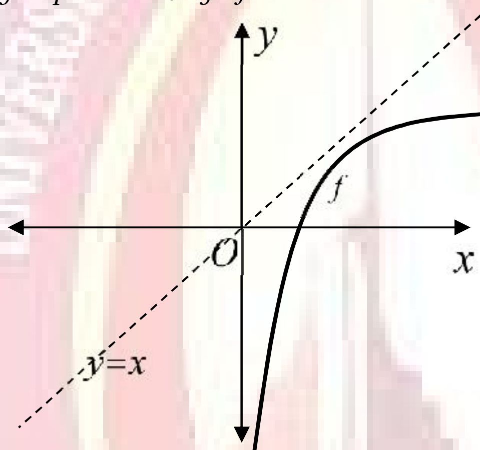
I. Sí: b>1

Para este caso tenemos:

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \log_b x \,;\, b > 1$

$Dom(f) = \mathbb{R}^+ \;\wedge\; Ran(f) = \mathbb{R}$

Cuya representación gráfica es:



PROPIEDADES:

Sea la función logarítmica $f(x) = \log_b x$ *para* $b > 1$*, luego:*

1. *La función* "f" *es creciente, es decir:* $\forall x_1; x_2 \in \mathbb{R}^+; x_1 < x_2 \Rightarrow \log_b x_1 < \log_b x_2$
2. "f" *es inyectiva en todo su dominio.*
3. *La función logarítmica* "f" *corta al eje de las abscisas en el punto* $(1;0)$.
4. *Cuando la variable* "x" *se aproxima a* "$+\infty$"*, los valores* $f(x)$ *se aproximan a* "$+\infty$".
5. *Cuando la variable* "x" *se aproxima a* "0"*, los valores* $f(x)$ *se aproximan a* "$-\infty$".

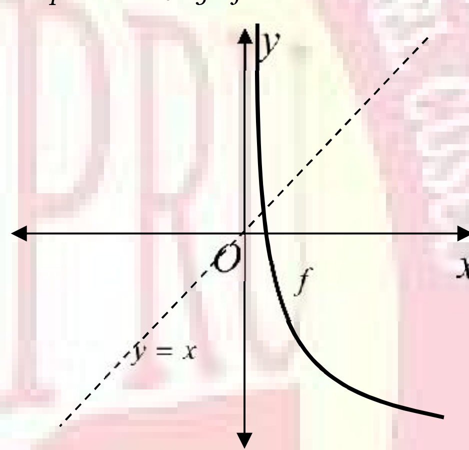
II. Sí: 0<b<1

Tenemos que:

$f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \log_b x \,;\, 0 < b < 1$

$Dom(f) = \mathbb{R}^+ \;\wedge\; Ran(f) = \mathbb{R}$

Y su representación gráfica es:



PROPIEDADES:

Sea la función exponencial $f(x) = \log_b x$ *con* $0 < b < 1$*, luego tenemos que:*

1. *La función* "f" *es decreciente, esto es:* $\forall x_1; x_2 \in \mathbb{R}^+; x_1 < x_2 \Rightarrow \log_b x_1 > \log_b x_2$
2. "f" *es inyectiva en todo su dominio.*
3. *La función logarítmica* "f" *corta al eje de las abscisas en el punto* $(1;0)$.
4. *Cuando la variable* "x" *se aproxima a* "$+\infty$"*, los valores* $f(x)$ *se aproximan a* "$-\infty$".
5. *Cuando la variable* "x" *se aproxima a* "0"*, los valores* $f(x)$ *se aproximan a* "$+\infty$".

OBSERVACIÓN:

La función logaritmo es la inversa de la función exponencial y viceversa

EJERCICIOS

1. *La gráfica de cierta función exponencial contiene al punto* $Q=\left(\frac{3}{2};27\right)$. *La base y la regla de correspondencia de la función es:*

a) $b=3\,;\ f(x)=3^{-x}$

b) $b=\frac{1}{3}\,;\ f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

c) $b=9\,;\ f(x)=9^{x}$

d) $b=\left(\frac{1}{9}\right);\ f(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^{2x}$

e) $b=3\,;\ f(x)=3^{\frac{1}{x}}$

2. *Dadas las funciones:*

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=2^{(1+x)}$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,g(x)=4^{(2x+5)}$

El punto de intersección de las gráficas de las funciones "f" *y* "g"

a) $(-3;9)$

b) $(-3;4)$

c) $(4;-3)$

d) $\left(-3;\frac{1}{4}\right)$

e) $\left(3;\frac{1}{4}\right)$

3. *El dominio de la función*

$g(x)=\dfrac{2^x}{2^x+2}+\sqrt{2^{x^2}-4}$ *es:*

a) $\left\langle -\sqrt{2};\sqrt{2}\right\rangle$

b) $\left\langle -\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right\rangle$

c) $\left\langle 0;\sqrt{2}\right\rangle$

d) $\left\langle -\sqrt{2};+\infty\right\rangle$

e) $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

4. *Dada la función:*

$g(x)=\log_{(x-2)}(99-x)$

La cantidad de números enteros que la función presenta en su domino, es:

a) 92

b) 93

c) 94

d) 95

e) 96

5. *El cardinal del conjunto solución de la ecuación* $3^{2|x|+1}-4.3^{|x|+1}+9=0$ *es:*

a) 5

b) 4

c) 3

d) 2

e) 1

6. *El dominio de la función* $g(x)=\log_{\sqrt{7}}\left(\dfrac{(x-3)(x+2)}{2x-3}\right)$ *es:*

a) $\left\langle -2;\frac{3}{2}\right\rangle$

b) $\langle 3;+\infty\rangle$

c) $\langle -2;3\rangle$

d) $\left\langle -2;\frac{3}{2}\right\rangle\cup\langle 3;+\infty\rangle$

e) $\left\langle -\frac{2}{3};1\right\rangle$

7. *Si:* $f(\log_{\sqrt[3]{3}} x)=anti\log(x-8)+co\log_3 x$

El valor de $f(10)$ *es:*

a) 6

b) 8

c) -5

d) -2

e) 5

8. *El dominio de la función "h", cuya regla de correspondencia es:*

$h(x)=\log\left(\sqrt{e^x-e^{-x}}+\sqrt{2e^{-x}-e^x}+1\right)$

a) $\left[0;\ln\sqrt{2}\right]$
b) $\left[0;1\right]$
c) $\left[-\ln\sqrt{2};\ln\sqrt{2}\right]$
d) $\left\langle 0;\ln\sqrt{2}\right\rangle$
e) $\left[0;\sqrt{2}\right]$

9. *El dominio de*

$h(x)=\log_2\sqrt{x^2-x-2}+\log(x-3)$ *es:*

a) $\langle -1;2\rangle$
b) $\langle 2;+\infty\rangle$
c) $\langle 3;+\infty\rangle$
d) $[1;3\rangle$
e) $\langle -3;3\rangle$

10. *La función inversa de* $f(x)=4^x+2^{x+1}$ *es:*

a) $f^{-1}(x)=\log_2\left(\sqrt{x-1}+1\right);\ x>1$
b) $f^{-1}(x)=\log_2\left(\sqrt{x+1}-1\right);\ x>0$
c) $f^{-1}(x)=\log_2\left(\sqrt{x-1}-1\right);\ x>1$
d) $f^{-1}(x)=\log_2\left(\sqrt{x-1}+1\right);\ x>0$
e) $f^{-1}(x)=\log_2\left(\sqrt{x+1}-1\right);\ x>-1$

11. *Dada a función* $h(x)=\dfrac{5^{-|x-1|}}{5^{-|x-1|}+1}$*, el rango viene dado por:*

a) $[0;\ln 2]$
b) $\langle 0;1]$
c) $\left\langle -\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$
d) $\left\langle 0;\dfrac{1}{2}\right\rangle$
e) $\left\langle 0;\dfrac{1}{2}\right]$

12. *El rango de la función* $f(x)=\log_{\frac{1}{4}}(x^2+16)$ *es:*

a) $\langle -\infty;4]$
b) $\langle -\infty;-2]$
c) $[-2;+\infty\rangle$
d) $[4;+\infty\rangle$
e) $[2;+\infty\rangle$

13. *El rango de la función* $g(x)=\log(|x|+1)$ *es:*

a) $\langle 1;+\infty\rangle$
b) $\langle -\infty;-1\rangle$
c) $\mathbb{R}_0^+$
d) $\mathbb{R}$
e) $\mathbb{R}_0^-$

14. *Si la función* $g:M\to\left[\dfrac{1}{9};27\right]$ *con* $g(x)=3^{3-|x|}$ *es suryectiva, el dominio de la función es:*

a) $[-1;1]$
b) $[-5;5]$
c) $[0;5]$
d) $\langle 0;1]$
e) $\mathbb{R}-\langle -5;5\rangle$

15. *El dominio de la función*

$g(x)=\log_{(x^2-4)}\left(1-\sqrt{4-|x|}\right)$ *es:*

a) $\langle 4;+\infty\rangle$
b) $\langle 2;3\rangle$
c) $\mathbb{R}-[-2;2]$
d) $[-4;-3\rangle\cup\langle 3;4]$
e) $[-4;-2\rangle\cup\langle 2;4]$

16. *Dada la función "h", cuya regla de correspondencia viene dada por:*

$h(x)=\log_3(4-|x|)$.

El dominio de la función es:

a) $\langle -1;4\rangle$
b) $\langle -4;4\rangle$
c) $\langle 3;4]$
d) $\langle -3;3\rangle$
e) $\langle -3;4\rangle$

17. *El dominio de la función* $g(x)=\log\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)+\sqrt{x^2}$ *es:*

a) $\mathbb{R}^+-\{1\}$
b) $\langle 0;1\rangle$
c) $\langle 1;2\rangle$
d) $\langle 1;+\infty\rangle$
e) $\mathbb{R}^+-\langle 0;1\rangle$

18. *Sea* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ *una función, tal que* $f(x)=e^{x^2-1}$. *La inversa de la función "f", si existe, es:*

a) $f^{-1}(x)=\ln\sqrt{x}+1\ ;\ x>e^{-1}$
b) $f^{-1}(x)=\sqrt{\ln x+1}\ ;\ x>e^{-1}$
c) $f^{-1}(x)=\sqrt{\ln(x+1)}\ ;\ x>e^{-1}$
d) $f^{-1}(x)=\sqrt{\ln x+1}\ ;\ x>e$
e) No existe

19. *El rango de la función:*

$f(x)=2^x-2^{|x|};\ x\in\mathbb{R}$ *es:*

a) $\mathbb{R}$
b) $\langle 0;+\infty\rangle$
c) $\langle -\infty;0\rangle$
d) $[0;+\infty\rangle$
e) $\langle -\infty;0]$

20. *Si* $h:M\to\left\langle \frac{1}{5};5\right]$ *es una función suryectiva, tal que* $h(x)=5^{1-|x|}$. *El conjunto M viene dado por:*

a) $[0;2\rangle$
b) $\langle -2;0]$
c) $\langle -1;1\rangle$
d) $\langle -2;2\rangle$
e) $\langle -2;2\rangle-\{0\}$

21. *Se define la función "g" dada por:*

$g(x)=\frac{7^x}{1+7^x}\ ;\ x\in[1;+\infty\rangle$

El conjunto $Dom\left(\frac{1}{g}\right)\cup Ran(g)$ *viene dado por:*

a) $\left[\frac{1}{7};+\infty\right\rangle$
b) $\left[\frac{7}{9};+\infty\right\rangle$
c) $\left\langle 0;\frac{1}{2}\right\rangle$
d) $\left[\frac{7}{8};+\infty\right\rangle$
e) $\left\langle 0;\frac{7}{2}\right]$

22. *El rango de la función* $g(x)=\ln\left(\sqrt[4]{1-\left(\frac{x}{2}\right)^4}+1\right)$ *es:*

a) $[1;2]$
b) $[0;2]$
c) $\left[0;\ln\sqrt{2}\right]$
d) $\left[\ln\sqrt{2};\ln 2\right]$
e) $[0;\ln 2]$

23. *Si:* $243(\log_x z)^5 = 32(\log_y z)^5$

El valor de $\log_y x$ *es:*

a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{5}{2}$
d) $\frac{4}{5}$
e) $\frac{3}{5}$

24. *El valor de* $H = \log_b b^{12} + 2^{\log_2 5} + 16^{\log_2 3}$ *es:*

a) 98
b) 36
c) 126
d) 189
e) 215

25. *Luego de resolver la ecuación logarítmica:*

$\log_6(x+2) + \log_6(x-3) = 2$

Los valores que toma la variable "x" *son:*

a) -6
b) 7
c) 8
d) 7 *y* -6
e) 7 *y* 6

26. *El valor de la expresión*

$$M = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ln\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \ldots + \ln\left(\frac{100}{101}\right)^3$$

Es:

a) $-3\ln 110$
b) $-\ln(1\times 2\times 3\times\ldots\times 101)$
c) $-3\ln(1\times 2\times 3\times\ldots\times 101)$
d) $-3\ln 101$
e) $-\ln 101$

27. *Luego de resolver la ecuación:*

$\log_3^2 x + 2\log_3 x = 3$

El producto de las raíces es:

a) -4
b) 9
c) $\frac{1}{9}$
d) -3
e) 1

28. *Luego de resolver:*

$\ln 12 - \ln(x-1) = \ln(x-2)$

El conjunto solución es:

a) $\{5;-2\}$
b) $\{-2\}$
c) $\{5\}$
d) $\{1;5\}$
e) $\{3;-2\}$

29. *Después de resolver la ecuación:*

$10^{\log_x\left(x^2-3x+5\right)} = 3^{\log_x 10}$

Los valores que toma la variable "x" *son:*

a) 2
b) 1
c) 1 *y* 2
d) 6
e) *Incompatible.*

30. *Al resolver la ecuación:*

$2^{\log_7(x^2-7x+21)} = 3^{\log_7 4}$

La suma de los elementos del conjunto solución es:

a) 2
b) 7
c) 21
d) 9
e) 12

31. *El producto de las raíces de la ecuación*

$81^{\log_x 3} = 27x$ *es:*

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{9}$
c) $\frac{1}{27}$
d) $\frac{1}{81}$
e) $\frac{1}{243}$

32. *Luego de resolver la ecuación:*

$$\log_x\left(\frac{8-\log_5 x}{\log_5 x}\right)^{\log_3 x} - 1 = 0$$

El valor que toma la variable "x" es:

a) 21
b) 16
c) 9
d) 25
e) 18

33. *Dado el sistema:*

$$\begin{cases} 10^x + 10^y = a \\ x - y = \log\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right) \end{cases}$$

El valor de $10^x - 10^y$ es:

a) $2a$
b) a
c) $2b$
d) b
e) $a+b$

34. *Si la ecuación:*

$\dfrac{\log(7a-x^3)}{\log(a-x)} = 3$ *tiene soluciones reales y el producto de tales soluciones es* 6. *El valor de* $\sqrt{a-1}$ *es:*

a) 2
b) 4
c) 3
d) 6
e) 5

35. *Si* $(x_1 > x_2)$ *son las soluciones de la ecuación:*

$$\log_a(ax).\log_x(ax) = \log_{a^2}\left(\frac{1}{a}\right)$$

El valor de $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)$, *con* $(a>1)$, *es:*

a) 5
b) $\dfrac{1}{a}$
c) $\dfrac{\sqrt{a}}{a^2}$
d) 1
e) $a\sqrt{a}$

36. *Si* $a^2 + b^2 = 7ab \vee a;b \in \mathbb{R}^+$ *y además se cumple:*

$$\log\left[\frac{1}{3}(a+b)\right] = \frac{k}{2}(\log a + \log b)$$

El valor de "k" es:

a) 1
b) 2
c) 3
d) -1
e) $\dfrac{1}{2}$

37. *Dada la ecuación* $x^2 - 4x - \log_{0,5} a = 0$ *cuyas raíces son reales. Los valores que toma "a" son:*

a) $a \geq \dfrac{1}{16}$
b) $a \leq \dfrac{1}{16}$
c) $0 < a < \dfrac{1}{16}$
d) $0 < a \leq \dfrac{1}{16}$
e) $a \geq 16$

BIBLIOGRAFÍA

1. Editores, A. F. (2021). *Problemas selectos.* Lima: Lumbreras.
2. Editores, A. F. (s.f.). *Algebra Tomo I.* Lima: Lumbreras.
3. Editores, A. F. (s.f.). *Álgebra tomo I.* Lumbreras.
4. Editores, A. F. (s.f.). *Algebra Tomo II.* Lima: Lumbreras.
5. Editores, D. d. (2008). *ÁLGEBRA MANUAL DE PREPARACIÓN PRE-UNIVERSITARIA.* Lima: Lexus editores.
6. Encinas, A. S. (2012). *Desigualdades e Inecuaciones.* Lima: Lumbreras.
7. Espinoza Ramos, E. (2002). *Análisis Matemático I.* Lima: Servicios Gráficos J.J.
8. Espinoza Ramos, E. (2003). *Álgebra Pre-Universitaria Volumen I.* Lima.
9. Espinoza Ramos, E. (2004). *Álgebra Pre-Preuniversitaria Volumen II.* Lima.
10. Flores P., M. (2018). *Álgebra teoría y Práctica.* Lima: San Marcos.
11. Quispe P., A. (s.f.). *Matrices.* Lima: Cuzcano.
12. Quispe P., A. (s.f.). *Relaciones y funciones I.* Lima: Cuzcano.
13. Quispe P., A. (s.f.). *Relaciones y funciones II.* Lima: Cuzcano.
14. Timoteo, S. (2012). *Colección el postulantes Älgebra I.* Lima: San Marcos.
15. Tori Loza, A., & Ramos Leyva, J. C. (1998). *Problemas de Álgebra y cómo resolverlos.* Lima: Racso Editores.
16. Velásquez Michue, C. F., & Fernández Salazar, A. Á. (2012). *FUNCIONES.* Lima: Lumbreras.